Math. U. 36 h Bugge

Thomas Bugge,
wailand Ritters vom Dannebrog, Etatsraths und Professors der Mathematik und Astronomie an der Universität zu Kopenhagen, ꝛc. ꝛc.

Lehrbuch der gesammten Mathematik

oder

Vorlesungen

über

die mathematischen Wissenschaften.

Dritten Theils erste Abtheilung

oder

Anleitung zur analytischen Geometrie,

der analytischen ebenen und sphärischen

Trigonometrie und der höhern Geometrie.

Aus dem Dänischen übersetzt

von

Ludolph Herrmann Tobiesen,
Doctor der Philosophie und Lehrer der Mathematik in Altona.

Mit 4 Kupfertafeln.

Altona,
bei Johann Friedrich Hammerich.
1816.

Thomas Bugge,
weiland Ritters vom Dannebrog, Etatsraths und Professors der Mathematik und Astronomie an der Universität zu Kopenhagen, ꝛc ꝛc.

Anleitung
zur
analytischen Geometrie,
der analytischen
ebenen und sphärischen Trigonometrie
und
der höhern Geometrie
oder
der Lehre von den Kegelschnitten.

Aus dem Dänischen übersetzt
von
Ludolph Herrmann Tobiesen,
Doctor der Philosophie und Lehrer der Mathematik in Altona.

Mit 4 Kupfertafeln.

Altona,
bei Johann Friedrich Hammerich.
1816.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

Die analytische Geometrie, die man richtiger die algebraische, rechnende oder logistische nennen möchte, hat wegen der wichtigen Lehren, zu welchen sie auf eine so leichte Art durch die Anwendung der Algebra auf die Lehrsätze der Geometrie führt, von jeher viele Freunde und Verehrer gefunden.

Der Verfasser des vorliegenden Werks über die logistische Geometrie hat im ersten Kapitel eine Menge geometrischer Lehrsätze durch Hülfe algebraischer Rechnung aufgelöst, die sich durch die Elementar-Geometrie nur auf einem mühsamern Wege auflösen lassen. In der Zugabe einiger analytisch-geometrischen Aufgaben kommen noch verschiedene Aufgaben über Polygone und

Theilung drey- und vierseitiger Figuren nach gewissen Bedingungen oder bestimmten Verhältnissen vor.

Im zweyten Kapitel, welches die Stereometrie befaßt, kommen Vergleichungen verschiedener Körper, analytische Formeln für deren Inhalt aus gewissen Datis derselben, Bestimmung der ganzen und krummen Oberfläche, Verwandelung des einen in den andern, Verdoppelung des Würfels u. s. w. vor.

Das dritte Kapitel oder die analytische ebene Trigonometrie enthält 1) Formeln für die trigonometrischen Linien, d. h. Beweise für die trigonometrischen Linien der Summen, Differenzen von Bogen und von vielfachen Bogen; 2) Formeln für rechtwinklichte ebene Dreyecke, wo alle Fälle auseinander gesetzt sind, die bey rechtwinklichten ebenen Dreyecken vorkommen können; 3) Formeln für schiefe ebene Dreyecke, wo ebenfalls alle bey schiefwinklichten Dreyecken mögliche Fälle entwickelt und bewiesen werden.

Das vierte Kapitel enthält mancherley Aufgaben aus der analytischen ebenen

Tri-

Trigonometrie. Hier werden durch Hülfe trigonometrischer Formeln und Berechnungen eine Menge Aufgaben, um bey Drey- und Vierecken aus einigen bekannten Stücken die andern gesuchten Stücke, ferner Flächeninhalt u. s. w. herzuleiten, aufgelöst.

Das fünfte Kapitel befaßt die sphärische Trigonometrie. Vorausgeschickt sind als Lehnsätze einige Lehrsätze der Stereometrie über die Lage der Ebenen, körperliche Winkel, Kugelschnitte u. s. w. Dann folgt die Lehre von den rechtwinklichten sphärischen Dreyecken, Aufzählung aller Fälle bey denselben und Entscheidung der Zweydeutigkeit der gefundenen Stücke. Darauf werden die schiefwinklichten sphärischen Dreyecke abgehandelt: Beschaffenheit der gefundenen Stücke, Aufzählung aller möglichen Fälle, Auflösung der vornehmsten Aufgaben. Hier gründet sich die Auflösung schiefwinklichter Dreyecke auf die Auflösung rechtwinklichter.

Im sechsten Kapitel kommt eine Ableitung allgemeiner analytischer sphärisch-trigonometrischer Formeln vor, wo aus der Lage der Ebenen und der größten Kreise

auf

auf der Kugeloberfläche allgemeine Formeln für jedes sphärische oder Kugeldreyeck hergeleitet werden, welche, wenn ein Winkel desselben = R angenommen wird, auch für rechtwinklichte Dreyecke gelten. Auch hier folgen, wie in der ebenen Trigonometrie, mehrere Aufgaben, in welchen aus einigen gegebenen Stücken andere unbekannte, z. B. Winkel, Seiten, aus dem sphärischen Dreyeck das Sehnendreyeck, der Flächeninhalt u. s. w. bestimmt werden.

Das siebente Kapitel handelt von den Kegelschnitten. Hier wird gezeigt, wie aus den verschiedenen Schnitten des Kegels die drey bekannten krummen Linien entstehen, die unter dem Namen Kegelschnitte bekannt sind. Durch trigonometrische Berechnung sind trigonometrische Formeln für dieselben gefunden und gezeigt worden, wie diese mit den bekannten kleinern Formeln übereinstimmen. Die trigonometrischen Formeln haben den Vorzug vor diesen, daß sie zeigen, wie lange die Schnitte einerley Curven geben, und wann ein Schnitt in den andern übergeht. Hier wird man manche Aufgaben aufgelöst fin-

finden, die man vergeblich in andern Lehrbüchern suchen wird, z. B. über berührende Linien oder Tangenten, über organische Beschreibung der Kegelschnitte, Aufgabe über zwey mittlere Proportionalen.

Im achten Kapitel kommen die Curven höherer Ordnungen vor. Bey der Cissoide des Diokles kommt wieder die Auflösung der im Alterthum bekannten Aufgabe zur Bestimmung zweyer mittlern Proportionalen zwischen zwey gegebenen geraden Linien vor. Die Auflösung dieser Aufgabe veranlaßte bekanntlich die Erfindung dieser krummen Linie. Die organische Beschreibung der Cissoide. Bey der Conchoide oder Muschellinie ist abermals die nämliche Aufgabe, und die nicht minder im Alterthum berühmte Aufgabe über die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile (Trisectio anguli) aufgelöst. Den Beschluß dieses Kapitels machen die transcendenten Linien.

Angehängt sind zwey Nachträge: Geschichte der Lehre von den Kegelschnitten und über die Methode der Alten, wobey Montucla (Histoire des Mathematiques) und Klügel (mathem. Wörterbuch) benutzt sind.

Neue

Neue Erfindungen wird man in diesem Werke nicht finden und auch nicht suchen; indeß hofft der Verfasser, daß man einen deutlichen und gründlichen Vortrag darin nicht vermissen wird.

Noch hält der Verfasser es für seine Pflicht, anzuzeigen, daß außer den mancherley Aufgaben, die er für seinen mathematischen Unterricht von Zeit zu Zeit sammelte, er deren mehrere aus Kästner, Karsten, Klügel, Lacroix und Meyer Hirsch entlehnt, nur sie ausführlicher und ohne Auslassung der nöthigen Zwischensätze vorgetragen hat.

Schließlich hofft er, daß auch diese Arbeit zur Ausbreitung gründlicher mathematischer Kenntnisse beytragen und mit Beyfall vom Publikum aufgenommen werden werde.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erstes Kapitel. Seite 1.

Analytische Plan-Geometrie. Sätze aus der ebenen Geometrie, algebraisch bewiesen. §. 3 — §. 13.

Verschiedene Lehrsätze über Dreyecke, §. 14 — §. 22.

Zugabe einiger analytisch-geometrischen Aufgaben. §. 23 — §. 43.

Zweytes Kapitel. S. 69.

Vergleichung der runden Oberflächen und Inhalte verschiedener Körper. §. 44 — §. 50.

Ueber Körper, die sich in und um eine Kugel beschreiben lassen. §. 52 — §. 57.

Verhältniß des körperlichen Inhalts des Cylinders, Kegels und der Kugel. §. 50.

Die sphärische Oberfläche eines Kugelabschnitts zu finden. §. 60.

Ueber zwey mittlere Proportionalen. §. 65.

Ein Parallelepipedum in einen Cubus zu verwandeln. §. 67.

Drittes Kapitel. S. 98.

Analytische Trigonometrie. Ueber das Positive und Negative in den trigonometrischen Linien. §. 68–§. 74.

Formeln für die trigonometrischen Linien. §. 75 — §. 97.

Formeln für rechtwinklichte ebene Dreyecke. §. 98 — §. 102.

Formeln für schiefe ebene Dreyecke. §. 103 — §. 119.

Viertes Kapitel. S. 143.

Aufgaben aus der analytischen Trigonometrie. Aus einigen gegebenen Stücken den Flächeninhalt eines Dreyecks, eines regulairen Polygons, eines Trapeziums zu finden. §. 120 — §. 147.

Einige andere Aufgaben von Vierecken. §. 148 — §. 152.

Fünftes Kapitel. S. 197.

Einleitung. §. 153 — §. 162.

Von rechtwinklichten sphärischen Dreyecken. §. 163 — §. 175.

Von schiefwinklichten sphärischen Dreyecken. §. 176 — §. 196.

Sechstes Kapitel. S. 253.

Ableitung allgemeiner analytischer sphärisch-trigonometrischer Formeln, nebst einigen Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie. §. 197 — §. 213.

Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie. §. 215 — §. 227.

Den Flächeninhalt sphärischer Dreyecke zu finden. §. 228 — §. 233.

Siebentes Kapitel. S. 312.

Von den Kegelschnitten. Entstehung der Kegelschnitte. §. 234 — §. 245.

Von der Parabel. §. 246 — §. 266.

Von der Ellipse. §. 267 — §. 288.

Von der Hyperbel. §. 289 — 317.

Achtes Kapitel.

Von Linien höherer Ordnung. §. 318 — §. 343.

Anhang.

Geschichte der Lehre von den Kegelschnitten. S. 405.

Ueber die Methode der Alten. S. 419.

Analytische Geometrie.

Erstes Kapitel.

Analytische Plan-Geometrie.

§. 1.

Um einen richtigen Begriff von der analytischen Geometrie festsetzen zu können, müssen wir zuerst die Analysis als Wissenschaft wohl unterscheiden von der Analysis als Methode. Von ersterer ist hier nicht die Rede; die Analysis als Methode aber oder die analytische Methode theilt sich

1) in die geometrische Analysis oder die Analysis der Alten, welche ihren Namen von der analytischen (auflösenden) Methode hat, deren sich die Alten, d. h. die griechischen Mathematiker zum Beweise geometrischer Lehrsätze und zur Auflösung von Aufgaben bedienten, indem sie die vorgelegte Frage in andere einfachere auflösten oder dieselbe analysirten, jede derselben durch geometrische Constructionen darstellten und durch Verbindung derselben

zu einer Construction gelangten, wodurch die vorgelegte Frage oder Aufgabe aufgelöst ward;

2) in die algebraische Analysis oder die Analysis der Neuern, wodurch die Bedingungen der vorgelegten Frage oder Aufgabe in Gleichungen gebracht werden, aus deren Verbindung man eine End- oder Final-Gleichung herleitet, in der das Unbekannte durch das Bekannte nach den Regeln der Algebra bestimmt wird. Den gefundenen Werth der unbekannten oder gesuchten Größe pflegt man alsdann zu construiren oder dieselbe durch eine geometrische Construction darzustellen.

Die analytische Geometrie ist demnach der analytische Vortrag der Geometrie oder die Anwendung der analytischen Methode auf die Geometrie zur Auffindung und Entdeckung geometrischer Wahrheiten, oder um Lehrsätze und Aufgaben leichter und geschwinder, als es nach dem gewöhnlichen Vortrag der Geometrie möglich ist, zu erweisen und aufzulösen.

Anmerk. Die analytische Geometrie, lateinisch calculus geometricus, nennt der verstorbene Prof. Lorenz (in der Vorrede zu seinen Grundlehren der allgemeinen Größenberechnung, Helmstedt 1805,) logistische (rechnende) Geometrie und rechnet selbst die analytische ebene und sphärische Trigonometrie, so wie die höhere Geometrie zu derselben.

§. 2.

§. 2.

Um den Unterschied beyder Methoden, nämlich der alten und neuern Analysis, desto kenntlicher zu machen, wollen wir folgende Aufgabe nach beyden Methoden auflösen:

Man soll über einer gegebenen geraden Linie A B Fig. 1. ein rechtwinklichtes Dreyeck beschreiben, so daß der rechte Winkel der gegebenen Linie gegenüber stehe und das Dreyeck einem gegebenen Quadrat Q gleich sey.

1) Geometrische Auflösung. Man beschreibe über A B einen Halbkreis. Weil nun alle Winkel im Halbkreise, deren Schenkel auf den Endpuncten des Durchmessers stehen, rechte Winkel sind, so lassen sich im Halbkreise unzählige rechtwinklichte Dreyecke von ungleicher Größe verzeichnen. Aber es wird ein rechtwinklichtes Dreyeck = Q verlangt; es kommt also darauf an, dessen Höhe = x zu finden. Man nenne die Hypotenuse des Dreyecks = b, die Seite des Quadrats = a, so soll $\frac{bx}{2} = a^2$ seyn. Man suche also zu $\frac{b}{2}$ und a die dritte Proportional-Linie, welches x ist; denn aus $\frac{bx}{2} = a^2$ folgt $\frac{b}{2} : a = a : x$. Man errichte in A eine senkrechte Linie A M = x und lege durch M die Paral-

lele C D, so sind A C B und A D B die verlangten Dreyecke.

2) Algebraische Auflösung. Man nenne AB = b, die Seite des Quadrats = a, die beyden Katheten x, y, so ist nach der Bedingung der Aufgabe $\frac{x.y}{2} = a^2$ und $2xy = 4a^2$, aber $x^2 + y^2 = b^2$, folglich $x^2 + 2xy + y^2 = 4a^2 + b^2$ und, wenn man rechts und links die Quadratwurzel auszieht, $x + y = \sqrt{(4a^2 + b^2)}$. Ferner $x^2 - 2xy + y^2 = b^2 - 4a^2$ und $x - y = \sqrt{(b^2 - 4a^2)}$, folglich $x = \frac{\sqrt{(4a^2+b^2)}+\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}$ und $y = \frac{\sqrt{(4a^2+b^2)}-\sqrt{(b^2-4a^2)}}{2}$.

Construction. Will man x und y nicht berechnen, sondern geometrisch durch Verzeichnung finden, so muß man $\sqrt{(4a^2 + b^2)}$ und $\sqrt{(b^2 - 4a^2)}$ nach dem pythagorischen Lehrsatze suchen, woraus sich x und y bestimmen lassen. Die drey Seiten des gesuchten Dreyecks sind also gegeben.

§. 3.

Wenn man die Theorie von der Aehnlichkeit der Dreyecke voraussetzt (Geometr. §. 137 – 163), so kann man daraus den pythagorischen Lehrsatz erweisen, daß nämlich das Quadrat der Hypotenuse A B (Fig. 2. Taf. 1.) der Summe der

Qua-

Quadrate der Katheten BC und AC gleich ist, oder $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Man nenne $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $AD = x$, $DB = y$ und also $AB = c = x + y$. Wenn CD senkrecht auf AB ist, so verhält sich $AB : BC = BC : BD$ (§. 158. Num. 2. Geometrie) und, wenn man die algebraischen Zeichen anwendet, $c : a = a : y$, also $a^2 = cy$ (§. 78. Arith.); ferner $AB : AC = AC : AD$, oder $c : b = b : x$ und $b^2 = cx$. Addirt man diese beyden Gleichungen, so ist $a^2 + b^2 = cy + cx = c(y + x)$; aber $y + x = c$; also $a^2 + b^2 = c^2$, oder $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

§. 4.

Wird eine Linie AB in C in zwey gleiche Theile und in D in zwey ungleiche Theile getheilt, so ist das Rechteck aus den ungleichen Theilen AD und BD so groß, als der Unterterschied der Quadrate auf CB und CD oder $AD.DB = CB^2 - CD^2$. (Fig. 3.)

Man nenne $AC = CB = a$, $CD = b$, so ist $AD = AC + CD = a + b$ und $DB = BC - CD = a - b$; also ist $AD.DB = (a + b).(a - b) = a^2 - b^2$ (§. 8. Buchstabenrech.). Nun

ist

ist $a^2 = CB^2$ und $b^2 = CD^2$; also $AD.DB = CB^2 - CD^2$.

Anmerk. Dieser Lehrsatz ist die fünfte Proposition in Euklids zweytem Buche. Auf ähnliche Weise lassen sich durch die Algebra alle Sätze des zweyten Buches erweisen.

§. 5.

AB (Fig. 4.) ist der Durchmesser eines gegebenen Kreises; FE eine Chorde, welche den Durchmesser schneidet; in dieser Chorde ist ein Punct D gegeben, die senkrechte Entfernung dieses Puncts vom Durchmesser ist DI, so ist das Quadrat von DI dem Unterschiede der Rechtecke aus den abgeschnittenen Stücken des Durchmessers AI und IB und den Stücken der Chorde FD und DE gleich, oder $DI^2 = AI.IB - FD.DE$.

Ziehe durch D die Chorde GH parallel mit AB und CK senkrecht auf GH, und endlich den Radius CH. Man nenne $AC = CB = CH = r$; $DI = CK = a$; $CI = DK = x$, so ist $AI = AC - IC = r - x$ und $IB = BC + IC = r + x$; $KH = \sqrt{(CH^2 - CK^2)} = (r^2 - a^2)$ (§. 93. Geometr.); also $DH = KH + DK = \sqrt{(r^2 - a^2)} + x$ und $DG = GK - DK = KH - DK$ (§. 108. Geom.) $= \sqrt{(r^2 - a^2)} - x$. Nun ist $GD.DH = FD.DE$ (§. 160. Geom.),

d. i.

d. i. $(\sqrt{(r^2 - a^2)} - x) \cdot (\sqrt{(r^2 - a^2)} + x)$
$= FD \cdot DE$. Werden diese beyden algebraischen Factoren mit einander multiplicirt, so bekommt man

$r^2 - a^2 - x^2 = FD \cdot DE$

$r^2 - x^2 = FD \cdot DE + a^2$, aber

$r^2 - x^2 = (r + x) \cdot (r - x)$; also

$(r + x) \cdot (r - x) = FD \cdot DE + a^2$. Ferner

$r - x = AI$ und $r + x = IB$ und $a^2 = DI^2$; also

$AI \cdot IB = FD \cdot DE + DI^2$ und

$AI \cdot IB - FD \cdot DE = DI^2$.

§. 6.

Wenn geometrische Aufgaben durch die Algebra aufgelößt werden sollen, so benennt man die gegebenen Größen mit den ersten und die gesuchten mit den letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z. So viele unbekannte Größen es gibt, so viele Gleichungen muß man suchen, und um diese durch Anwendung der Lehrsätze der synthetischen Geometrie zu finden, ist es oft nöthig, Perpendikular-, Parallellinien und Kreise zu ziehen. Für diese Vorbereitung lassen sich keine allgemeine Regeln geben, sondern es kommt, um dieselbe zu finden, auf einen glücklichen geometrischen Blick an.

In einem rechtwinklichten Dreyeck ACB (Fig. 5.) ist die eine Kathete $AC = b$ nebst dem Unterschiede $= d$ zwischen der Hypotenuse AB und der Kathete BC gegeben; man soll die andere Kathete $BC = x$ und die Hypotenuse AB finden.

Aus B als Mittelpunct und mit dem Radius $BC = x$ beschreibe man den Bogen CD, so ist $AD = AB - BD = AB - BC = d$ und $AB = AD + DB = d + x$. Nun ist $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (§. 93. Geom.) und wenn man die algebraischen Benennungen gebraucht,

$$(d + x)^2 = b^2 + x^2$$

$$d^2 + 2dx + x^2 = b^2 + x^2$$

$$d^2 + 2dx = b^2$$

$$2dx = b^2 - d^2$$

$$BC = x = \frac{b^2 - d^2}{2d}$$

$$AB = AD + DB = d + x = d + \frac{b^2 - d^2}{2d}$$

$$= \frac{2d^2 + b^2 - d^2}{2d} = \frac{d^2 + b^2}{2d}$$

Beyspiel. $AC = b = 72'$, $AD = d = 32'$; man wird die Kathete $BC = 65'$ und die Hypotenuse $AB = 97'$ finden.

§. 7.

In einem rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 6.) ist die Hypotenuse $AB = c$ und der Unterschied zwischen beyden Katheten $AC - CB = d$ gegeben; man soll $AC = x$ und $BC = y$ finden.

Aus C als Mittelpunct und mit dem Halbmesser $BC = y$ beschreibe man den Bogen DB, so ist $AD = AC - DC = AC - CB = d = x - y$. Im Dreyeck ABC ist $AB^2 = AC^2 + BC^2$ oder $c^2 = x^2 + y^2$ und $c^2 - y^2 = x^2$.

Nach der zweyten Gleichung der Aufgabe ist $x - y = d$ und $x = d + y$; diese Gleichung quadrirt und in die erste gebracht, gibt

$$d^2 + 2dy + y^2 = c^2 - y^2$$
$$d^2 + 2dy + 2y^2 = c^2$$
$$2dy + 2y^2 = c^2 - d^2$$
$$dy + y^2 = \frac{c^2 - d^2}{2}$$

Man mache durch Addirung von $\frac{d^2}{4}$ die Größe $dy + y^2$ zu einem vollständigen Quadrat (§. 94. Alg.), so ist

$\frac{1}{4}d^2 + dy + y^2 = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{4}d^2$
$= \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}d^2$, also
$\frac{1}{2}d + y = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}d^2)}$ und
$BC = y = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}d^2)}$.

Bey-

Beyspiel. $AB = c = 97'$, $AD = d = 7'$, so wird man $y = BC = 65'$ und $AC = x = d + y = 7 + 65' = 72'$ finden.

§. 8.

In einem bey C (Fig. 2.) rechtwinklichten Dreyeck ACB fälle man die senkrechte Linie CD auf die Hypotenuse AB herab; gegeben sind die Hypotenuse $AB = c$ und die senkrechte Linie $CD = p$; man soll die abgeschnittenen Stücke der Hypotenuse $AD = x$, $DB = y$ und beyde Katheten AC und CB finden.

Es ist $DB = AB - AD$ oder $y = c - x = DB$.

$\triangle ADC \sim \triangle BDC$ (§. 157. Geom.), folglich

$$AD : DC = DC : DB \text{ oder}$$

$$x : p = p : y = c - x$$

$$cx - x^2 = p^2$$

$$-cx + x^2 = -p^2 \text{ (§. 93. 94. Alg.)}$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 - cx + x^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - p^2$$

$$\tfrac{1}{2}c + x = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - p^2)} \text{ und}$$

$$AD = x = -\tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - p^2)} \text{ und}$$

$$DB = y = c - x = \tfrac{1}{2}c \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}c^2 - p^2)}.$$

Der Kürze wegen nenne man die gefundene Formel für $x = m$ und für $y = n$, so ist, weil AC^2

=

$= AD^2 + DC^2$ (§. 93. Geom.), $AC^2 = m^2 + p^2$ und im Dreyeck DBC ist $BC^2 = n^2 + p^2$; also $AC = \sqrt{(m^2 + p^2)}$ und $BC = \sqrt{(n^2 + p^2)}$.

Man kann die beyden Katheten auch noch auf eine andere Art finden; denn $AB : AC = AC : AD$ (§. 158. Geom.) oder $c : AC = AC : m$, also $AC = \sqrt{cm}$, eben so $AB : BC = BC : DB$ und $c : BC = BC : n$, also $BC = \sqrt{cn}$,

Beyspiel. $AB = c = 75'$, $CD = p = 36'$, so findet man $AD = x = 27'$, $DB = y = 42'$ und $AC = 45'$ und $BC = 60$.

§. 9.

In einem rechtwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 7.) ist die Hypotenuse $AB = c$ und das Verhältniß der beyden Katheten $AC : CB = m : n$ gegeben; man soll beyde Katheten $AC = x$ und $CB = y$ finden.

Im Dreyeck ACB ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$, d. h. $c^2 = x^2 + y^2$ und $c^2 - y^2 = x^2$. Aber vermöge der Bedingung ist $AC : CB = m : n$, oder $x : y = m : n$, also $x = \frac{my}{n}$ und $x^2 = \frac{m^2 y^2}{n^2}$, welche Gleichung in die vorige gebracht, gibt

m^2

$$\frac{m^2 y^2}{n^2} = c^2 - y^2$$

$$m^2 y^2 = c^2 n^2 - n^2 y^2$$

$$m^2 y^2 + n^2 y^2 = c^2 n^2$$

$$(m^2 + n^2) y^2 = c^2 n^2$$

$$y^2 = \frac{c^2 n^2}{m^2 + n^2}$$

$$CB = y = \frac{cn}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$$

$$AC = x = \frac{my}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{cn}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$$

$$= \frac{cm}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}.$$

Beyspiel. $AB = c = 300'$, $AC : CB = m : n = 4 : 3$, also $m = 4$, $n = 3$; also $CB = y = \frac{900}{\sqrt{(16+9)}} = \frac{900}{5} = 180'$ und $AC = a = \frac{1200}{\sqrt{(16+9)}} = \frac{1200}{5} = 240'$.

§. 10.

In einem rechtwinklichten Dreyeck ACB (Fig. 7.) ist die Hypotenuse $AB = c$ und die Summe der Katheten $AC + CB = a$ gegeben; man soll die beyden Katheten selbst finden, oder $AC = x$, $CB = z$.

Im Dreyeck ACB ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$ oder $c^2 = x^2 + z^2$ und $c^2 - z^2 = x^2$. Ferner $AC + CB = a$ oder $x + z = a$ und $z = a - x$. Man quadrire die Gleichung $x + z = a$, so ist

x^2

$x^2 + 2xz + z^2 = a^2$ und $x^2 = a^2 - 2xz - z^2$, welchen Werth von x^2 man in die Gleichung $c^2 - z^2 = x^2$ bringen muß, so bekommt man

$$c^2 - z^2 = a^2 - 2xz - z^2$$
$$c^2 = a^2 - 2xz$$
$$2xz = a^2 - c^2$$
$$z = \frac{a^2 - c^2}{2x}$$

Man bringe diesen Werth von z in die Gleichung $z = a - x$, so hat man

$$\frac{a^2 - c^2}{2x} = a - x$$
$$a^2 - c^2 = 2ax - 2x^2$$
$$\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}c^2 = ax - x^2$$
$$\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = -ax + x^2$$
$$\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$
$$\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = -\tfrac{1}{2}a + x$$
$$\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = x = AC \text{ und}$$
$$CB = z = a - x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

Beyspiel. $AB = c = 97'$, $AC + CB = a = 137'$, so ist $AC = x = \frac{137}{2} + \sqrt{\left(\frac{9409}{2} - \frac{18769}{4}\right)} = \frac{137}{2} + \sqrt{\left(\frac{18818}{4} - \frac{18769}{4}\right)} = \frac{137}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{137}{2} + \frac{7}{2} = \frac{144}{2} = 72'$. $BC = z = a - x = 137 - 72 = 65'$.

§. 10.

§. 11.

Eines rechtwinklichten Dreyecks ABC (Fig. 8.) Flächeninhalt = a und Perimeter AB + BC + CA = p sind gegeben; man soll die Hypotenuse AC = y und die Katheten AB = x und BC = z finden.

Der Inhalt des Dreyecks $ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC$ oder $a = \frac{1}{2} x z$ und $2a = x z$ und $4a = 2xz$. Ferner $AC^2 = AB^2 + BC^2$ oder $y^2 = x^2 + z^2$; man addire beyde Gleichungen, so hat man $4a + y^2 = x^2 + 2xz + z^2$. $AB + BC + AC = x + z + y = p$, also $x + z = p - y$. Diese Gleichung quadrire man, so ist $x^2 + 2xz + z^2 = p^2 - 2py + y^2$ und

$$p^2 - 2py + y^2 = 4a + y^2$$
$$p^2 - 2py = 4a$$
$$p^2 - 4a = 2py$$
$$\frac{p^2 - 4a}{2p} = y = AC.$$

Um die Kathete $BC = z$ zu finden, ist $x + z = p - y = p - \frac{p^2 - 4a}{2p} = \frac{2p^2 - p^2 - 4a}{2p} = \frac{p^2 - 4a}{2p}$, also $x + z = \frac{p^2 - 4a}{2p}$ und $x = \frac{p^2 - 4a}{2p} - z$. Ferner $x = \frac{2a}{z}$, also $\frac{2a}{z} = \frac{p^2 + 4a}{2p} - z$ und $2a = \frac{(p^2 + 4a)}{2p} z - z^2$, und wenn man die quadratische Gleichung auflößt, findet

findet man $z = BC$. Auf gleiche Weise findet man die zweyte Kathete $AB = x$.

§. 12.

Eines rechtwinklichten Dreyecks ABC (Fig. 9.) beyde Katheten $AB = a$, $AC = b$ sind gegeben; man soll in der Kathete AB einen Punct D finden, dergestalt, daß die senkrechte Linie DE die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken BD und DA ist.

$BD = x$, so ist $DA = a - x$; $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ und $BD : DE = BA : AC$ (§. 148. Geom.) oder $x : DE = a : b$ und $DE = \frac{bx}{a}$ und, wenn man quadrirt, $DE^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$; aber nach der Bedingung ist $BD : DE = DE : DA$ oder $x : DE = DE : a - x$, also $DE^2 = ax - x^2$ und $\frac{b^2x^2}{a^2} = ax - x^2$ und $b^2x^2 = a^3x - a^2x^2$. Diese Gleichung läßt sich durch x dividiren, also $b^2x = a^3 - a^2x$ und $b^2x + a^2x = a^3$ und $(b^2 + a^2)x = a^3$ und $x = \frac{a^3}{b^2 + a^2}$.

§. 13.

Eines schiefwinklichten Dreyecks ABC (Fig. 10.) Flächeninhalt $= a$, Höhe $CD = h$ und

und das durch die senkrechte Linie CD abgeschnittene Stück $DB = d$ sind gegeben; man soll alle Seiten finden.

$AD = x$, $AB = AD + DB = x + d$,
$AC = y$, $BC = \sqrt{(DB^2 + DC^2)} = \sqrt{(d^2 + h^2)}$.
Ferner $\triangle ABC = \frac{AB \cdot DC}{2}$ oder $a = AB \cdot \frac{h}{2}$
und $\frac{2a}{h} = AB$. Die dritte Seite $AC = y$ findet man auf folgende Weise: $\triangle ABC = \frac{AB \cdot DC}{2}$
oder $a = x + d \cdot \frac{h}{2} = \frac{hx + dh}{2}$ und $x = \frac{2a - dh}{h}$.
Nun ist $AC^2 = AD^2 + DC^2$, d. h. $y^2 = x^2 + h^2$
$= \frac{(2a - dh)^2}{h^2} + h^2$ und, wenn man $2a - dh$ quadrirt, so bekommt man

$$y^2 = \frac{4a^2 - 4adh + d^2h^2}{h^2} + h^2 \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{4a^2 - 4adh + d^2h^2 + h^4}{h^2} \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{\pm\sqrt{(4a^2 - 4adh + d^2h^2 + h^4)}}{h}$$

§. 14.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 10.) drey Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ sind bekannt; man soll dessen Flächeninhalt finden.

Es sey $BD = x$, so ist $AD = c - x$ und $CD = y$, so ist

AC^2

$AC^2 = CB^2 + AB^2 - 2\,AB \,.\, BD$ (§. 101. Geom.) oder $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$ oder $2cx = a^2 + c^2 - b^2$ und

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

Ferner im Dreyeck BDC (§. 93. Geom.) ist

$CB^2 = DC^2 + DB^2$ und

$CB^2 - DB^2 = DC^2$ oder

$y^2 = a^2 - x^2 = (a+x) \,.\, (a-x)$, aber

$$a + x = a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} = \frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2c}.$$

Wenn $a + b + c$ mit $a - b + c$ multiplicirt wird, so bekommt man $2ac + a^2 + c^2 - b^2$, also

$$a + x = \frac{(a+b+c) \,.\, (a-b+c)}{2c}$$

Ferner $a - x = a - \frac{a^2-c^2+b^2}{2c} = \frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2c}$.

Wenn man $-a + b + c$ mit $a + b - c$ multiplicirt, so bekommt man $2ac - a^2 - c^2 + b^2$, also

$$a - x = \frac{(-a+b+c) \,.\, (a+b-c)}{2c}$$

Folglich $y^2 = a^2 - x^2 = (a+x) \,.\, (a-x) =$

$$\frac{(a+b+c) \,.\, (a-b+c) \,.\, (a+b-c) \,.\, (-a+b+c)}{4c^2}$$

und $y =$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c) \,.\, (a-b+c) \,.\, (a+b-c) \,.\, (-a+b+c)}}{2c}$$

Nun ist $\triangle ABC = \frac{AB \,.\, CD}{2} = c\,\frac{y}{2}$ (§. 91. Geom.);

folglich $\triangle ABC =$

$$\sqrt{(a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (-a+b+c)}$$
$$4.$$

Diese Formel läßt sich sehr bequem durch Logarithmen berechnen. Z. B.

$BC = + a = 523$
$AC = + b = 435$
$AB = + c = 320$

$p = BC + AC + AB = a + b + c = 1278$

$+ a = 523$	$+ a = 523$
$+ c = 320$	$+ b = 435$
843	958
$- b = 435$	$- c = 320$
$q = a + c - b = 408$	$r = a + b - c = 638$

$+ b = 435$
$+ c = 320$
755
$- a = 523$
$s = b + c - a = 232$

$\log. p. = \log. 1278 = 3,1065309$
$\log. q. = \log. 408 = 2,6106602$
$\log. r. = \log. 638 = 2,8048207$
$\log. s. = \log. 232 = 2,3654880$

$\log. pqrs = 10,8874998$

$\log. \sqrt{pqrs} = \frac{10,8874998}{2}$

$= 5,4437499$

$$\sqrt{pqrs} = 277811$$

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{pqrs}}{4} = \frac{277811}{4} = 69452{,}8.$$

Der Flächeninhalt des Dreyecks ABC ist also = 69452,8 □Ellen, wenn die Seiten in Ellen gegeben sind.

§. 15.

Im Durchmesser AD (Fig. 11.) eines Halbkreises ist ein Punct P gegeben, wodurch die senkrechte Linie PM gezogen ist; man soll eine Chorde AB dergestalt ziehen, daß EB dem Halbmesser des Kreises gleich oder EB = AC sey.

AC = EB = r, AD = 2r, AP = a, AB = x, AE = AB — EB = x — r. Um ähnliche Dreyecke zu bekommen, ziehe man die Chorde BD und die senkrechte Linie BG, so ist $\triangle$ APE $\sim$ $\triangle$ AGB, also AE : AP = AB : AG oder x — r : a = x : AG, also $AG = \frac{ax}{x-r}$. Ferner $\triangle$ ABD $\sim$ $\triangle$ ABG und AD : AB = AB : AG, oder

$2r : x = x : \frac{ax}{x-r}$, also

$x^2 = \frac{2arx}{x-r}$ und

$x^3 - rx^2 = 2arx$ und

$x^2 - rx = 2ar$ und

$x^2 - rx + \frac{1}{4}r^2 = 2ar + \frac{1}{4}r^2$, folglich

$-\frac{1}{2}r + x = \pm\sqrt{(2ar + \frac{1}{4}r^2)}$ und
$AB = x = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{(2ar + \frac{1}{4}r^2)}$.

§. 16.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 12.) Grundlinie $AB = b$ und Höhe $CD = a$ sind gegeben; man soll in demselben ein Rechteck EFGH zeichnen, dessen Flächeninhalt sich zu dem Flächeninhalt des Dreyecks verhält, wie $n : m$.

$AB = b$, $CD = a$, $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab$, $EH = ID = x$, $CI = a - x$, $EF = y$, $\triangle ABC \sim \triangle EFC$; also

$AB : CD = EF : IC$ (§. 150. Geom.), oder

$b : a = y : a - x$, also

$ab - bx = ay$ und

$\frac{ab-bx}{a} = y$

$EFGH : \triangle ABC = n : m$ (vermöge der Bedingung)

$xy : \frac{1}{2}ab = n : m$

$mxy = \frac{1}{2}abn$, also

$$y = \frac{\frac{1}{2}abn}{mx} = \frac{abn}{2mx}$$

Die Werthe von y gleich gesetzt, gibt

$\frac{abn}{2mx} = \frac{ab-bx}{a}$ und

$a^2bn = 2abmx - 2bmx^2$ und

$a^2n = 2amx - 2mx^2$ und

a^2n

$$\frac{a^2 n}{2m} = ax - x^2$$

$$-\frac{a^2 n}{2m} = -ax + x^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 n}{2m} = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

$$\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 n}{2m}\right)} = -\tfrac{1}{2}a + x$$

$$\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 n}{2m}\right)} = x = ID.$$

Hiedurch ist der Punct I in CD gefunden, wodurch man EF ziehen muß. Will man nun eine besondere Gleichung für die zweyte Seite EF des gesuchten Rechtecks haben, so ist $CI = CD - DI = a - x$. In diese Gleichung bringe man den gefundenen Werth von x, so hat man

$$CI = a - x = a - \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 n}{2m}\right)}$$

oder

$$CI = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 n}{2m}\right)}.$$ Ferner

AB : CD = EF : CI (§. 150. Geom.) oder

$$b : a = y : \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 n}{2m}\right)}$$ und

$$ay = \tfrac{1}{2}ab \mp b\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 n}{2m}\right)},$$ folglich

$$CF = y = \tfrac{1}{2}b \mp \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 n}{2m}\right)}.$$

§. 17.

Es sind zwey concentrische Kreise (Fig. 13.) gegeben; man soll durch dieselben eine gerade

Linie

Linie ziehen, so daß die Chorden AB und DE sich verhalten, wie m : n oder AB : DE = m : n.

Kann man finden, wie weit die verlangten Chorden vom Mittelpuncte stehen oder CF, so sind sie dadurch bestimmt (§. 112. Geom.). Diese senkrechte Linie schneidet die Chorden in gleiche Theile, also $AF = \frac{1}{2} AB$ und $EF = \frac{1}{2} ED$. Man nenne $AC = R$, $CE = r$, $CF = x$, so ist

$AF^2 + FC^2 = AC^2$ (§. 93. Geom.) und

$AF^2 = AC^2 - FC^2$

$AF^2 = \frac{1}{4} AB^2 = R^2 - x^2$

$EF^2 + FC^2 = CE^2$

$EF^2 = CE^2 - FC^2$

$EF^2 = \frac{1}{4} ED^2 = r^2 - x^2$. Ferner

$AB : ED = m : n$

$\frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} ED = m : n$ (§. 75. Arith.)

$\frac{1}{4} AB^2 : \frac{1}{4} ED^2 = m^2 : n^2$ (§. 89. Arith.)

$R^2 - x^2 : r^2 - x^2 = m^2 : n^2$

$n^2 R^2 - n^2 x^2 = m^2 r^2 - m^2 x^2$

$m^2 x^2 - n^2 x^2 = m^2 r^2 - n^2 R^2$

$(m^2 - n^2) x^2 = m^2 r^2 - n^2 R^2$

$$x^2 = \frac{m^2 r^2 - n^2 R^2}{m^2 - n^2}$$

$$CF = x = \pm \frac{\sqrt{(m^2 r^2 - n^2 R^2)}}{\sqrt{(m^2 - n^2)}}$$

§. 18.

§. 18.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 14.) drey Seiten sind gegeben; man theile die Grundlinie AB in zwey gleiche Theile in D und ziehe CD. Man soll die Größe dieser Linie finden.

Man nenne $AC = b$, $BC = a$, $AD = c$, $AB = 2c$. Man ziehe die senkrechte Linie CE. Man nenne $EB = x$, $DE = c - x$, $CE = y$, $DC = z$. Im Dreyeck DCE ist $DC^2 = DE^2 + EC^2$ oder $z^2 = (c-x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$ und $z^2 - c^2 + 2cx - x^2 = y^2$.

Eine zweyte Gleichung für y^2 findet man im Dreyeck BEC, wo $CB^2 = CE^2 + EB^2$ ist, oder $a^2 = y^2 + x^2$, also $a^2 - x^2 = y^2$. Man stelle die Werthe von y^2 gleich, so ist

$$z^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2$$
$$z^2 - c^2 + 2cx = a^2$$
$$2cx = a^2 + c^2 - z^2$$
$$x = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c}$$

Ferner kann man in dem Dreyeck ABC eine zweyte Gleichung für x erhalten; nämlich nach §. 101 Geom. ist

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot EB$ oder
$b^2 = a^2 + 4c^2 - 4cx$ oder
$4cx = a^2 - b^2 + 4c^2$
$$x = \frac{a^2 - b^2 + 4c^2}{4c}$$

Setzt

Setzt man nun die Werthe von x gleich, so hat man

$$\frac{a^2 - b^2 + 4c^2}{4c} = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c} \text{ und}$$

$$a^2 - b^2 + 4c^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2z^2 \text{ und}$$

$$2c^2 + 2z^2 = a^2 + b^2 \text{ und}$$

$$2z^2 = a^2 + b^2 - 2c^2 \text{ und}$$

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2}, \text{ also}$$

$$DC = z = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2c^2)}}{\sqrt{2}}.$$

Aus der Gleichung $a^2 + b^2 = 2c^2 + 2z^2$ kann man den hübschen Lehrsatz herleiten:

Die Summe der Quadrate der Seiten AC und CB ist gleich der doppelten Summe der Quadrate auf AD und DC, d. i. $AC^2 + CB^2 = 2AD^2 + 2CD^2$.

Anmerk. Auf diese Art kann man aus den Gleichungen dieser Aufgaben mehrere Lehrsätze herleiten. Z. B. in der ersten Aufgabe §. 6., wo $AD = d$ und $AC = b$, ist $BC = \frac{b^2 - d^2}{2d}$, also $2d \cdot BC = b^2 - d^2$ oder $2AD \cdot BC = AC^2 - AD^2$, d. i. das zweyfache Rechteck von AD und der Kathete BC ist so groß als der Unterschied der Quadrate auf AC und AD.

Ferner ist §. 6. bewiesen, daß $AB = \frac{b^2 + d^2}{2d}$ oder $2d \cdot AB = b^2 + d^2$ oder $2AD \cdot AB = AC^2 + AD^2$, d. i. das doppelte Rechteck von AD und der Hypotenuse AB ist so groß als die Summe der Quadrate auf der Kathete AC und auf AD.

§. 19.

Wenn die Größe der gegebenen Linien in Fuß- oder irgend einem andern Längenmaaße gegeben ist, so läßt sich die gefundene Gleichung für die unbekannte Größe in Zahlen berechnen, wovon Beyspiele in §. 6. 7. 8. 9. und 10. angeführt sind; wenn aber die bekannten Größen bloß als Linien gegeben sind, ohne daß man weiß, aus wie vielen Theilen sie bestehen, so läßt sich die arithmetische Auflösung nicht anwenden, sondern die unbekannte Größe muß durch eine geometrische Construction gesucht werden, d. h. man muß aus den gegebenen Linien durch eine genaue geometrische Zeichnung die Größe der gesuchten Linie bestimmen.

§. 20.

Gleichungen vom ersten Grade oder alle einfache Gleichungen lassen sich durch gerade Linien construiren.

Es sey die Gleichung $x = \frac{bc}{a}$ gegeben, so entsteht daraus folgende Proportion $a : b = c : x$ (§. 79. 98. Arith.); die gesuchte Linie x ist also die vierte Proportional-Linie zu den drey gegebenen Linien a, b und c, und läßt sich durch Zeichnung oder Construction nach §. 143. Geom. finden.

Sind

Sind in der gegebenen Gleichung Zähler und Nenner Producte aus mehrern Factoren, z. B. $x = \frac{abc}{de}$, so muß man sie durch Auflösung in Factoren auf den ersten Fall bringen. Man sieht nämlich gleich, daß $x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$ ist. Der erste Theil läßt sich construiren (§. 143. Geom.) und man findet eine Linie $m = \frac{ab}{d}$; also ist nun $x = \frac{mc}{e}$, welche Gleichung sich gleichfalls leicht construiren läßt (§. 143. Geom.)

Auf diese Art lassen sich allgemein alle diejenigen Formeln construiren, in welchen der Zähler einen Factor mehr als der Nenner hat.

Z. B. $x = \frac{abcd}{efg} = \frac{ab}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$. Zuerst findet man eine Linie $m = \frac{ab}{e}$ und $x = \frac{mc}{f} \cdot \frac{d}{g}$. Darauf findet man eine Linie $n = \frac{mc}{f}$ und nun ist $x = \frac{nd}{g}$ und wenn man diese letzte Formel construirt, so findet man $x = \frac{abcd}{efg}$. Auf gleiche Art construirt man $= \frac{a^3}{b^2} = \frac{aaa}{bb} = \frac{aa}{b} \cdot \frac{a}{b}$; eben so $\frac{a^5}{b^4} = \frac{aa}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$.

Wenn sich die Formel für x in eine geometrische Proportion auflösen läßt, so kann man noch dieser allgemeinen Regel folgen.

Wollte man die Formel in §. 6. $x = \frac{b^2 - d^2}{2d}$ $= \frac{(b+d) \cdot (b-d)}{2d}$ construiren, so bekommt man folgende Proportion

$$2d : b + d = b - d : x$$

Man zeichne einen beliebigen Winkel CAE (Fig. 15.) und mache $AB = 2d$, $BC = b + d$ und $AD = b - d$, ziehe BD und durch C die Linie CE parallel mit BD, so ist

$AB : BC = AD : DE$ (§. 141. Geom.)

$2d : b + d = b - d : x$ und

$\frac{(b+d) \cdot (b-d)}{2d} = \frac{b^2 - d^2}{2d} = x = DE.$

§. 21.

Besteht der Zähler eines Bruchs aus mehrern durch + und — verbundenen Producten und jedes hat einen Factor mehr als der Nenner, z. B. $x = \frac{abc + def + ghi}{mn}$, so kann man diesen Bruch als mehrere durch + und — verbundene Brüche ausdrücken; nämlich $x = \frac{abc}{mn} + \frac{def}{mn} + \frac{ghi}{mn}$. Man construire jeden dieser Brüche, so findet man eine Linie $p = \frac{abc}{mn}$ (§. 20.); eine zweyte $q = \frac{def}{mn}$ und eine dritte $r = \frac{ghi}{mn}$ und wenn man diese Linien addirt, so hat man durch Construction $x = p + q + r = \frac{abc}{mn} + \frac{def}{mn} + \frac{ghi}{mn}$ gefunden.

§. 22.

§. 22.

Einige Gleichungen vom zweyten Grad oder quadratische Gleichungen lassen sich leicht durch den pythagorischen Lehrsatz construiren. Z. B. $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Man nimmt nämlich die Linie a zur einen und b zur andern Kathete eines rechtwinklichten Dreyecks, so wird die Hypotenuse $= x$ (§. 94. Geom.). Die Gleichung $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ läßt sich leicht nach §. 95. Geom. construiren.

Ist die Gleichung $x^2 = ab$ gegeben, so ist $a : x = x : b$ (§. 79. Arith.) und die gesuchte Linie x ist die mittlere Proportional-Linie zwischen den gegebenen Linien a und b, und daher läßt sich diese Gleichung nach §. 159. Geom. construiren.

Um eine schwerere Construction durch ein Beyspiel zu erläutern, nehme man die Aufgabe §. 15., wo $AC = r$, $AD = 2r$, $AP = a$ und die Gleichung $AB = x = \frac{1}{2}r + \sqrt{(2ar + \frac{1}{4}r^2)}$ ist.

Man ziehe die Chorde AM, so ist

$AD : AM = AM : AP$ (§. 158. Num. 4. Geom.)

$2r : AM = AM : a$

$AM^2 = 2ar.$

Man ziehe NM senkrecht auf MA, mache $NM = \frac{1}{2}r$ und ziehe NA, so ist

$AN^2 = AM^2 + NM^2$ (§. 93. Geom.)

$AN = \sqrt{(2ar + \frac{1}{4}r^2)}$. Man

Man verlängere AN und mache $NO = \frac{1}{2}r$, so ist $AO = ON + AN = \frac{1}{2}r + \sqrt{(2ar + \frac{1}{4}r^2)} = x$.

Aus A mit dem Halbmesser AO beschreibe man den Bogen OB, so ist $AB = AO$ und AB ist die verlangte Chorde und $EB = AC$.

Anmerk. Vollständigern Unterricht über die geometrische Construction der Gleichungen findet man in Application d'Algebre a la Géométrie par Mr. Guisnée à Paris 1705, 4to. p. 4 — 38. und p. 132 — 233. und in Elemens d'Analyse geometrique par Th. Simpson, à Paris 1771, 8. pag. 101 — 206. Ferner in Traité elementaire de Géométrie et de la maniere d'appliquer l'Algebre a la Géométrie par Mr. Bussut, à Paris 1777, 8. pag. 321 — 496. Ferner in A Treatise of Algebra by Collin Maclaurin, London 1748, 8. Part III of the Application of Algebra and Geometry to each other, pag. 297 — 366.

Zugabe einiger analytisch-geometrischen Aufgaben.

§. 23.

Aus der Seite eines Vielecks von n Seiten die Seite eines Vielecks von 2 n Seiten zu finden. (Fig. 16.)

Man nenne die bekannte Seite des Vielecks von n Seiten $AD = f$, die Seite des Vielecks von 2 n Seiten oder $DB = z$, so ist, wenn man noch DC

$= BC$

$= BC = AC = r$ nennt, in dem bey E rechtwinklichten Dreyecke DEC die halbe gegebene Seite des Vielecks von n Seiten oder $DE = \frac{1}{2} f$ und $EC^2 = DC^2 - DE^2 = r^2 - \frac{1}{4} f^2$; ferner $BE = BC - EC = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)}$ und $DB^2 = DE^2 + BE^2 = z^2 = \frac{1}{4} f^2 + (r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)})^2 = \frac{1}{4} f^2 + r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)} + r^2 - \frac{1}{4} f^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)}$. Hier ist also z in lauter bekannten Größen gegeben.

Aus der eben gefundenen Formel $z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)}$ läßt sich, wenn man z als bekannt annimmt, f finden; d. h. man kann aus der Seite des Vielecks von 2 n Seiten die Seite des Vielecks von n Seiten auf folgende Weise finden.

$z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)}$, und

$z^2 - 2r^2 = -2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)}$, und

$2r^2 - z^2 = 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} f^2)}$; und, wenn man quadrirt,

$4r^4 - 4r^2 z^2 + z^4 = 4r^2 (r^2 - \frac{1}{4} f^2)$,

$= 4r^4 - r^2 f^2$, und

$4r^4 - 4r^2 z^2 + z^4 - 4r^4 = -r^2 f^2$, oder

$4r^2 z^2 - z^4 = r^2 f^2$, und

$\frac{4r^2 z^2 - z^4}{r^2} = f^2$, und

$\frac{z^2 (4r^2 - z^2)}{r^2} = f^2$, und

$\frac{z\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{r} = f$.

Sekt.

Man kann nach der Formel $f = \frac{z\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{r}$, wenn man $z = r$ setzt, die Seite des gleichseitigen Dreyecks im Kreise finden.

$\frac{r\sqrt{(4r^2 - r^2)}}{r} = f$, und

$\sqrt{(4r^2 - r^2)} = f$, und

$\sqrt{r^2} = r\sqrt{3} = f$.

Setzt man nach der ersten Formel $f = r\sqrt{3}$ oder $f^2 = 3r^2$ und bringt diesen Werth in die Formel für z^2, so hat man

$z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{3}{4}r^2)}$, und

$z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\frac{1}{4}r^2}$, und

$z^2 = 2r^2 - 2r \cdot \frac{1}{2}r$, folglich

$z^2 = 2r^2 - r^2 = r^2$, mithin

$z = r$.

$r\sqrt{3}$ ist aber die Seite eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreyecks, wie eben erwiesen, folglich $z = r$ die Seite des regelmäßigen in den Kreis verzeichneten Sechsecks, die also dem Radius gleich ist, wie auch in der Geometrie (§. 170.) erwiesen ist.

Die Seite des Quadrats im Kreise oder FG (Fig. 16.) ist $= \sqrt{(CF^2 + CG^2)} = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$. Bringt man diesen Werth für f in die Formel $z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}f^2)}$, so hat man $z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right)}$ oder

$z^2 =$

$$z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\frac{r^2}{2}}, \text{ oder}$$

$$z^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}r^2}, \text{ oder}$$

$$z^2 = 2r^2 - 2r^2\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ und}$$

$$z^2 = 2r^2\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

Aus diesen Formeln läßt sich also die Seite eines regulairen Drey=, Sechs=, Zwölfecks, so wie eines Vier=, Achtecks u. s. w. berechnen. Es ist angenehm und nützlich, erst die allgemeinen Formeln aufzusuchen und aus diesen die besondern Fälle herzuleiten.

Für das Sechseck ist $f = r$, folglich die Seite des Zwölfecks oder

$$z^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{\left(r^2 - \tfrac{1}{4}r^2\right)}$$

$$= 2r^2 - 2r\sqrt{\left(\tfrac{3}{4}r^2\right)}$$

$$= 2r^2 - 2r^2\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

$$= 2r^2\left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right).$$

$r = 1$ gesetzt 1 gibt $z^2 = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2 - \sqrt{3}$, also $z = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$, oder weil $\sqrt{3} = 1{,}7320511$, so ist $z = \sqrt{(2 - 1{,}7320511)}$

$= 0{,}5176380$.

§. 24.

Das Verhältniß der Seite eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Zehnecks zum Halbmesser des Kreises zu finden.

Es sey (Fig. 17.) AB die zu suchende Seite des Zehnecks $= x$, der Halbmesser $AK = r$.

Man

Man verlängere AB, bis BD = BK. Der Winkel ABK ist = BDK + BKD, AKB = $\frac{4R}{10}$ (wegen des Zehnecks) = $\frac{2R}{5}$, ferner ABK + BAK = 2R — AKB und, weil ABK = BAK, so ist 2 ABK = 2R — AKB = 2R — $\frac{2R}{5}$ und ABK = $\frac{2R - \frac{2R}{5}}{2}$ = R — $\frac{R}{5}$ = $\frac{5R-R}{5}$ = $\frac{4R}{5}$; folglich ABK = 2 AKB, weil $\frac{4R}{5} = 2 . \frac{2R}{5}$.

Weil ferner BD = BK, so ist BKD = BDK = AKB, weil nämlich BDK = BKD und folglich ABK = 2 BDK = 2 BKD und, wie eben erwiesen, = 2 AKB ist. Die Dreyecke ABK und AKD sind also ähnlich, weil A gemeinschaftlich AKB = KDA und folglich ABK = AKD ist. Folglich ist AK : AB = AD : AK oder r : x = r + x : r und $x^2 + rx = r^2$, welches eine quadratische Gleichung giebt, die man auf die bekannte Weise aufzulösen hat.

Die beyden mittlern Glieder obiger Proportion sind unbekannt, ihr Unterschied = r aber gegeben; wüßte man beyder unbekannten Größen Summe, so würde sich x leicht finden lassen. Man setze also, um der Auflösung einer quadratischen Gleichung, die für x zwey Werthe, einen positiven und negati-

ven, giebt, von welchen ersterer doch hier nur gelten kann, zu entgehen, $u = r + 2x$, so hat man $u - r = 2x$ und $\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}r = x$. Diesen Werth von x bringe man in obige Proportion, so bekommt man $r : \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}r : r$ und $r^2 = \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}r^2$ und $r^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}u^2$ und $4r^2 + r^2 = u^2$ und $5r^2 = u^2$, folglich $\sqrt{5r^2} = u$, mithin $\frac{\sqrt{5r^2}}{2} - \frac{1}{2}r = x$.

Die obige quadratische Gleichung giebt, wenn man sie auflöst, denselben Werth; nämlich wenn man linker Hand das Quadrat ergänzt, so hat man $x^2 + rx + \frac{1}{4}r^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2$ und $x + \frac{1}{2}r = \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4}r^2)} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \frac{\sqrt{5r^2}}{2}$ und folglich $x = \frac{\sqrt{5r^2}}{2} - \frac{1}{2}r$.

§. 25.

Für den gegebenen Halbmesser eines Kreises $= r$ die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks $= x$ durch Zeichnung oder Construction zu finden.

Man mache (Fig. 18.) $BC = \frac{1}{2}r$, senkrecht darauf $DB = r$, so ist $DC^2 = DB^2 + BC^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{5r^2}{4}$ und $DC = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{\sqrt{5r^2}}{2}$. Mit dem Halbmesser $DC = \frac{\sqrt{5r^2}}{2}$ beschreibe man

den

den Bogen AD, so ist $AB = AC - BC = \frac{\sqrt{5r^2}}{2} - \frac{1}{2}r = x$ oder die Seite des Zehnecks.

In der ebenen Geometrie §. 171. ist erklärt worden, was es heißt, eine gerade Linie nach äußerm und mittlerm Verhältnisse oder in stetiger Proportion zu schneiden; wie das zu bewerkstelligen (§. 172.) und §. 173. ist erwiesen worden, daß, wenn der Halbmesser eines Kreises auf die erwähnte Weise geschnitten wird, das größere Stück des Halbmessers die Seite eines in den Kreis zu beschreibenden Zehnecks ist. Die eben erklärte Methode giebt also auf eine leichtere Weise die Auflösung der nämlichen Aufgabe. Daß beyde Methode übrigens auf eins hinaus laufen, erhellet so: $AB = x = \sqrt{\frac{5}{4}}r - \frac{1}{2}r$; ist nun r nach stetiger Proportion geschnitten, so ist $r : x = x : r - x$ und $x^2 = -rx + r^2$, folglich $x = -\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2} - \frac{1}{2}r$, also eben so.

Die Seite des Zehnecks ist $= z = \frac{\sqrt{5r^2}}{2} - \frac{1}{2}r = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}r = \frac{r\sqrt{5}-1}{2}$; man soll die Seite des Fünfecks oder f finden. Es ist aber §. 23.

$$f = \frac{z\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{r}, \text{ ferner}$$

$$z^2 = \left(\frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{5r^2}{4} - \frac{r^2\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}r^2$$

$= r^2$

$= r^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\right) = r^2 \left(\frac{6}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4}\right) =$
$r^2 \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = r^2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. Also $4r^2 - z^2$
$= 4r^2 - r^2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 4r^2 - \frac{3r^2}{2} + \frac{r^2\sqrt{5}}{2}$
$= \frac{8r^2 - 3r^2 + r^2\sqrt{5}}{2} = r^2 \left(\frac{8-3+\sqrt{5}}{2}\right) =$
$r^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $r^2 f^2 = z^2 (4r^2 - z^2) =$
$r^2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot r^2 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) =$
$r^4 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = r^4 \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right)$;
also $f^2 = z^2 \left(\frac{4r^2-z^2}{4r^2}\right) = r^4 \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4r^2}\right) =$
$r^2 \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right) = r^2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ und also $f =$
$r\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})}{2}}$. $f^2 = r^2 \cdot \frac{(5-\sqrt{5})}{2}$ und $f^2 - r^2$
$= r^2 \frac{(5-\sqrt{5})}{2} - r^2 = \frac{5r^2 - r^2\sqrt{5}}{2} - r^2 =$
$\frac{5r^2 - r^2\sqrt{5} - 2r^2}{2} = \frac{3r^2 - r^2\sqrt{5}}{2} = r^2 \frac{(3-\sqrt{5})}{2}$.
Aber $r^2 \frac{(3-\sqrt{5})}{2} = x^2$, also $f^2 - r^2 = x^2$ und
$f^2 = x^2 + r^2$. Es ist aber x^2 das Quadrat der Seite des Zehnecks und f^2 das Quadrat der Seite des Fünfecks, folglich macht die Summe der Quadrate des Halbmessers und des Zehnecks das Quadrat der Seite des Fünfecks aus, welches schon §. 174. der Geometrie erwiesen ist. Im Euklid ist dies der 10. Satz des 13. Buchs.

Weil DB = r und AB = x, so ist $AD^2 = AB^2 + DB^2 = x^2 + r^2 = f^2$; AD ist also die Seite des Fünfecks.

§. 26.

Von den drey Spitzen eines Dreyecks werden Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seiten oder deren Verlängerungen gefällt; es soll bewiesen werden, daß sie sich in einem einzigen Puncte schneiden.

Das Dreyeck sey ABC (Fig. 19. u. 20.) und BD und CE die Perpendikel auf den Seiten BA und AC oder deren Verlängerungen. Der Durchschnittspunct derselben ist O, man ziehe durch diesen und A die Linie AO und verlängere dieselbe bis F: so muß bewiesen werden, daß auch diese ein Perpendikel auf BC oder AFC = AFB = R sey.

Beweis. Weil in den beyden Dreyecken BOE und COD der Winkel D = E = R und O = O ist, so sind sie ähnlich und daher BO : CO = OE : OD. Ferner sind die Dreyecke BOC und EOD ähnlich, weil BOC = EOD und, wie eben erwiesen, BO : CO = OE : ED ist; es ist daher CBD = DEO und ADO + AEO = 2 R, aber auch DOE + DAE = 2 R, welches so erhellet: EOA + OAE = R, weil

OEA

OEA = R und DOA + DAO = R, weil ADO = R, also EOA + OAE + DOA + DAO = DOE + DAE = 2 R. Um jede vierseitige Figur aber, deren gegenüberliegende Winkel = 2 R sind, läßt sich ein Kreis beschreiben, folglich auch um DAEO, und es ist alsdann der Winkel DEO = DAO, weil sie beyde auf dem Bogen DO stehen, aber CBD = DEO, folglich auch CBD = DAO. In den beyden Dreyecken CAF und CBD ist also CAF = DAO = CBD und der Winkel ACF gemeinschaftlich, folglich ist AFC = BDC = R. Die Linie AF, welche durch den Durchschnittspunct der beyden Perpendikel BD und EC geht, steht also auf BC senkrecht, ist mithin auch ein Perpendikel auf der dritten Seite des Dreyecks, und folglich schneiden sich alle drey Perpendikel in einem einzigen Puncte O.

§. 27.

In einem Dreyeck ABC sind die aus den Spitzen desselben auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten Perpendikel gegeben; man soll daraus die Seiten, die Winkel und den Inhalt des Dreyecks finden.

Man nenne (Fig. 19. u. 20.) das Perpendikel

$BD = a$,
$CE = b$,
$AF = c$, und
die Seite $AB = x$,
$AC = y$,
$BC = z$.

Aus §. 14. ist der Inhalt des Dreyecks ABC oder

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z).(x+y-z).(x+z-y).(z+y-x)}.$$

Die Dreyecke ABD und ACE sind ähnlich und deshalb $BD : AB = CE : AC$ oder $a : x = b : y$, mithin

$$y = \frac{bx}{a}.$$

Auch die Dreyecke CBE und ABF sind ähnlich, weil $BEC = AFB = R$ und ABF gemeinschaftlich, folglich

$AF : AB = CE : BC$, d. h.
$c : x = b : z$; folglich

$$z = \frac{bx}{c}.$$

Bringt man diese Werthe für y und z in die obige Gleichung, so hat man ΔABC

$= \frac{1}{4}$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(x+\frac{bx}{a}+\frac{bx}{c}\right)\cdot\left(x+\frac{bx}{a}-\frac{bx}{c}\right)\cdot\left(x+\frac{bx}{c}-\frac{bx}{a}\right)\cdot\left(\frac{bx}{c}+\frac{bx}{a}-x\right)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(acx+bcx+abx)}{ac}\cdot\frac{(acx+bcx-abx)}{ac}\cdot\frac{(acx+abx-bcx)}{ac}\cdot\frac{(abx+bcx-acx)}{ac}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{x\,\frac{(ac+bc+ab)}{ac}\cdot x\,\frac{(ac+bc-ab)}{ac}\cdot x\,\frac{(ac+ab-bc}{ac}\cdot x\,\frac{(ab+bc-ac)}{ac}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{x^4}{a^4c^4}\cdot(ac+bc+ab).(ac+bc-ab).(ac+ab-bc).(ab+bc-ac)}$$

$$= \frac{x^2}{4a^4c^2}\cdot\sqrt{(ac+bc+ab).(ac+bc-ab).(ac+ab-bc).(ab+bc-ac).}$$

Man nenne das, was hinter dem Wurzelzeichen steht, $= M$, so hat man

$$\triangle ABC = \frac{x^2\cdot\sqrt{M}}{4a^2c^2}, \text{ aber}$$

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}bx, \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}bx = \frac{x^2\cdot\sqrt{M}}{4a^2c^2} \text{ und}$$

$$x = \frac{2a^2bc^2}{\sqrt{M}}.$$

Man kann nun die beyden andern Seiten des Dreyecks finden, wenn man den gefundenen Werth von x in die Gleichungen $y = \frac{bx}{a}$ und $z = \frac{bx}{c}$ bringt.

Für

Für die Winkel findet man

$$\text{sin. BAC} = \frac{a}{x} = \frac{a \cdot \sqrt{M}}{2a^2bc^2} = \frac{\sqrt{M}}{2abc^2}$$

$$\text{sin. ABC} = \frac{c}{x} = \frac{c \cdot \sqrt{M}}{2a^2bc^2} = \frac{\sqrt{M}}{2a^2bc}$$

$$\text{sin. ACB} = \frac{c}{y} = \frac{c\sqrt{M}}{2ab^2c^2} = \frac{\sqrt{M}}{2ab^2c}$$

$$\text{Endlich } \triangle ABC = \frac{1}{2}bx = \frac{\frac{1}{2}b \cdot 2a^2bc^2}{\sqrt{M}} = \frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{M}}.$$

§. 28.

Der Inhalt eines Vierecks ABCD (Fig. 21.) aus seinen vier Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ zu bestimmen, wenn einer seiner Winkel, A, ein rechter Winkel ist.

Den gesuchten Inhalt nenne man man x und $BD = f$. Nun ist $f^2 = a^2 + d^2$, also

1) $\triangle BAD = \frac{ad}{2}$ und, weil im Dreyeck BCD nun alle 3 Seiten bekannt sind, so ist

2) $\triangle BCD = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+f) \cdot (b+c-f) \cdot (b+f-c) \cdot (f+c-b)}$, also

3) $ABCD = \triangle BAD + \triangle BCD$ oder

$$x = \frac{ad}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+f) \cdot (b+c-f) \cdot (b+f-c) \cdot (f+c-b)}.$$

§. 29.

§. 29.

In einem Dreyeck ABC (Fig. 22.) sind zwey Seiten AB und AC nebst dem eingeschlossenen Winkel A bekannt; man soll des Dreyecks Inhalt finden.

Man nenne $AB = a$, $AC = b$, $A = m$ und den Inhalt des Dreyecks $= x$, so ist $BD = a \cdot \sin. m$ und $\triangle ABC = x = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{ab \cdot \sin m}{2}$. In einem andern Dreyeck mögen die nämlichen Stücke A, B, M, X heißen, so ist $X = \frac{A \cdot B \cdot \sin. M}{2}$ und

$$x : X = \frac{a \cdot b \cdot \sin. m}{2} : \frac{A \cdot B \cdot \sin. M}{2}.$$

Setzt man nun $m = M$, so ist, weil alsdann $\sin. m = \sin. M$,

$$x : X = a \cdot b : A \cdot B.$$

Aus dieser Formel läßt sich also der Lehrsatz herleiten: wenn zwey Dreyecke einen gleichen Winkel haben, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Producte aus den diesen Winkel einschließenden Seiten, und das ist eigentlich der Satz, den wir zur Auflösung der folgenden Aufgaben nöthig haben.

§. 30.

Ein Dreyeck, ABC (Fig. 23.), aus einem Puncte D auf einer seiner Seiten, BA, nach einem

einem gewissen Verhältnisse durch eine Linie, DE, dergestalt zu theilen, daß sich das ganze Dreyeck, ABC, zum abgeschnittenen Theil, DBE, wie m : n verhalte.

Auflösung. Man nenne AB = a, BC = b, AC = c, BD = d; die Entfernung des Puncts D von B ist nämlich gegeben und BE = x wird gesucht.

Nun ist nach dem vorigen §.

$$\triangle ABC : \triangle DBE = AB \cdot BC : DB \cdot BE$$
$$= a \cdot b : d \cdot x$$
$$= m : n, \text{ also}$$
$$m : n = a \cdot b : d \cdot x \text{ und}$$
$$dx = \frac{a \cdot b \cdot n}{m} \text{ und}$$
$$x = \frac{a \cdot b \cdot n}{d \cdot m}.$$

Diese Größe = x trage man von B nach E und ziehe DE, so ist DE diejenige Linie, die das Dreyeck ABC in dem gegebenen Verhältnisse theilt.

Fände man $x > BC$, so kann die Theilungslinie die Seite BC nicht treffen, wohl aber die Seite AC und die Theilungslinie wird irgend eine Linie DF seyn. Also ist nach dem vorigen §. und wenn man AF = z nennt,

$$\triangle ABC : \triangle ADF = AB \cdot AC : AD \cdot AF$$
$$= a \cdot c : (a - d) \cdot z.$$

Nach

Nach der Voraussetzung soll sich verhalten

$\triangle ABC : DBCF = m : n$, folglich

$\triangle ABC : \triangle ADF = m : m-n$, also

$m : m-n = a \cdot c : (a-d)\, z$ und

$(a-d)\, z = \frac{(m-n)\, ac}{m}$ und mithin

$$z = \frac{(m-n)\, ac}{m\,(a-d)}.$$

Diese Größe setze man von A nach F und ziehe DF, so wird diese Linie das Dreyeck ABC im Verhältnisse m : n theilen.

§. 31.

Ein Dreyeck, ABC, (Fig. 24.) durch eine der einen Seite parallele Linie, DE, nach einem gegebenen Verhältnisse, m : n, zu theilen.

Auflösung. Man sieht leicht, daß es hier darauf ankommt, den Punkt D oder $DB = x$ zu bestimmen.

Weil die Linie DE mit AC parallel seyn soll, so sind die Dreyecke ABC und DBE ähnlich und folglich ist.

$\triangle ABC : \triangle DBE = AB^2 : DB^2$

$= c^2 : x^2$ ($AB = c$ gesetzt) und

$= m : n$, also

$m : n = c^2 : x^2$ und

$$x^2 = \frac{n \cdot c^2}{m} \text{ und}$$

$$x = \sqrt{\frac{n\,c^2}{m}}$$

$$= c\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Diese Größe $= x$ setze man von B nach D ab und ziehe durch D eine Parallele mit AC, so ist das Verlangte geschehen.

§. 32.

Aufgabe. Man soll von einem Trapezium ABEF (Fig. 25.) mit 2 parallelen Seiten durch eine mit denselben parallele Linie, CD, ein Stück von gegebenem Inhalte abschneiden.

Auflösung. Man ziehe das Perpendikel FG und FH parallel mit EB, nenne ferner AB $= a$, EF $= b$, die Höhe FG $= h$, DC $= y$, und den Inhalt des abzuschneidenden Stücks CDFE $= m$, so muß man den Punct I oder FI $= x$ zu bestimmen suchen, durch welchen die Theilungslinie parallel mit AB und EF zu legen ist.

Da die Dreyecke AFH und DFK ähnlich sind, so ist

$$AH : DK = FH : FK = FG : FI.$$

Nun ist aber AH $=$ AB $-$ HB $=$ AB $-$ EF $= a - b$; DK $=$ DC $-$ CK $=$

DC

$DC - FE = y - b$, folglich, wenn man diese Werthe in die Proportion bringt,

$$a - b : y - b = h : x, \text{ also}$$
$$(a-b)\,x = (y-b)\,h.$$

Das Trapezium $DCEF = \frac{1}{2}(y+b)\,x = m$ und

$$(y+b)\,x = 2m \text{ und}$$
$$x = \frac{2m}{y+b}.$$

Aber aus der ersten Gleichung ist $x = \frac{(y-b)\,h}{a-b}$.

Diese Werthe von x gleichgesetzt geben folgende neue Gleichung:

$$\frac{(y-b)\,h}{a-b} = \frac{2m}{y+b} \text{ und}$$
$$\frac{(y-b)\,.\,(y+b)\,h}{a-b} = 2m \text{ und}$$
$$(y^2 - b^2)\,h = 2am - 2bm, \text{ und}$$
$$h\,y^2 - b^2\,h = 2m\,(a-b) \text{ und}$$
$$h\,y^2 = 2m\,(a-b) + b^2\,h, \text{ endlich}$$
$$y^2 = \frac{2m\,(a-b)}{h} + b^2 \text{ giebt}$$
$$y = \sqrt{\frac{(2m\,(a-b)+b^2)}{h}}.$$

In die obige Gleichung $x = \frac{(y-b)\,h}{a-b}$ bringe man den eben gefundenen Werth von y, so hat man

$$x = \frac{h}{a-b} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{2m(a-b)}{h} + b^2\right)} - b\right).$$

§. 33.

§. 33.

Aufgabe. Man soll ein Viereck oder Trapezium mit zwey parallelen Seiten durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Puncte auf einer dieser Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse theilen.

Auflösung. Das Trapezium heiße ABCD (Fig. 26.); von demselben soll durch die Linie TE das Stück ABET abgeschnitten werden, so daß sich eben genanntes Stück zum ganzen Trapezium verhält, wie n : m. Man nenne $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$, $AT = f$ und $BE = x$, welches gesucht wird.

Der Inhalt des Trapeziums ABCD ist $(AD + BC) \cdot \frac{H}{2}$, welches die Höhe des Trapeziums bedeutet, $= (a + b) \cdot \frac{H}{2}$ und der Inhalt des Trapeziums $ABET = (AT + BE) \cdot \frac{H}{2} = (f + x) \cdot \frac{H}{2}$, folglich verhalten sie sich wie $(a + b) \cdot \frac{H}{2} : (f + x) \cdot \frac{H}{2}$ oder, wenn man durch den gleichen Factor dividirt, wie $a + b : f + x$, also $ABCD : ABET = a + b : f + x$, aber

$ABCD : ABET = m : n$, also

$a + b : f + x = m : n$, und

$(f + x)\, m = (a + b)\, n$, und

$f + x$

$$f + x = \frac{(a+b)n}{m}, \text{ und}$$

$$x = \frac{(a+b)n}{m} - f.$$

Diese Größe = x trage man von B nach E und ziehe die Linie ET, so theilt diese das Trapezium auf die verlangte Weise.

Findet man x = o oder = b, so ist BT oder CT die Theilungslinie. Würde aber x negativ oder > b gefunden, so bedeutet das, daß die Theilungslinie auf BA oder CD fällt.

Es kommt also jetzt darauf an, AF = y oder DG = z zu finden. Man ziehe BT, so ist

ABCD : △ ABT = a + b : f, aber

△ABT : △AFT = c : y (wie die Grundl., weil sie gleiche Höhe haben)

folglich ABCD : △ AFT = (a + b) c : f y, aber

ABCD : △ AFT = m : n, folglich

(a + b) c : f y = m : n, und

f m y = (a + b) c n, und

$$y = \frac{(a+b)\,c\,n}{f\,m} = AF.$$

Ist x > b, so ist

ABCD : △ CDT = a + b : a − f, und

△ CDT : △ DGT = d : z (bey gleicher Höhe, wie die Grundlinien)

also $ABCD : \triangle DGT = (a+b)\,d : (a-f)\,z$,

aber nach der Voraussetzung soll seyn

$ABCD : ABCGT = m : n$, und

$ABCD : \triangle DGT = m : m-n$

$(a+b)\,d : (a-f)\,z = m : m-n$, und

$(a-f)\,mz = (m-n) \cdot (a+b)\,d$, und

$$z = (m-n) \cdot \frac{(a+b)\,d}{(a-f)\,m} = DG.$$

§. 34.

Aufgabe. Den Inhalt eines Dreyecks aus zwey Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel zu finden.

Auflösung. Im Dreyeck ABC Fig. 27. sind $AB = c$ und $AC = b$ nebst dem Winkel $B = x$ gegeben; man fälle das Perpendikel $BD = c \cdot \text{sin. } x$, so ist $\triangle ABC = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{bc\,\text{sin. } x}{2} = q$. Ein anderes Dreyeck, dessen Seiten m und n heißen und wo der eingeschlossene Winkel derselben ist, heiße Q, so ist $Q = \frac{mn\,\text{sin. } x}{2}$; also

$$q : Q = \frac{bc\,\text{sin. } x}{2} : \frac{mn\,\text{sin. } x}{2}$$
$$= bc : mn.$$

Oder: Dreyecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte der Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

Dieser Satz gilt auch von Parallelogrammen, welche einen gleichen Winkel haben, weil sie sich in zwey gleiche Dreyecke zerlegen lassen.

§. 35.

Aufgabe. Ein jedes Trapezium durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Puncte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Das Trapezium sey ABCD (Fig. 28.) und der gegebene Theilungspunct E, aus welchem die Theilungslinie EF dergestalt gezogen werden soll, daß ABCD : CDEF = m : n.

In den frühern Aufgaben waren die gegenüberliegenden Seiten des Trapeziums, welche von der Theilungslinie geschnitten wurden, parallel, hier sind aber AD und BC nicht parallel, werden also verlängert sich in G schneiden.

Ist das Trapezium gegeben, so lassen sich auf irgend eine Weise AG, BG, DG, CG bestimmen.

Man nenne AG = a, BG = b, DG = c, CG = d, und da der Punct E gegeben, so ist auch EG = f gegeben.

Der Punct F soll gefunden werden, oder FG ist die unbekannte Größe = x.

Nun

Nun ist

$\triangle ABG : \triangle CDG = AG . BG : DG . CG$

(§. 34.)

$= a . b : c . d$, also

$\triangle ABG - \triangle CDG : \triangle CDG = ab - cd : cd$,

also

$ABCD : \triangle CDG = ab - cd : cd.$

Eben so ist

$\triangle EFG : \triangle CDG = fx : cd$, also

$\triangle EFG - \triangle CDG : \triangle CDG = fx - cd : cd$, d. h.

$CDEF : \triangle CDG = fx - cd : cd.$

Folglich ist

$ABCD : CDEF = ab - cd : fx - cd$, aber

nach der Voraussetzung

$ABCD : CDEF = m : n$, also

$m : n = ab - cd : fx - cd$, und

$$fx - cd = n \frac{(ab - cd)}{m} \text{ und}$$

$$fx = n \frac{(ab - cd)}{m} + cd \text{ und}$$

$$x = n \frac{(ab - cd)}{fm} + \frac{cd}{f}.$$

Diesen Werth trage man von G nach F, und ziehe die Linie EF, so theilt diese das Trapezium nach dem verlangten Verhältnisse.

§. 36.

Aufgabe. Eine gerade Linie dergestalt zu theilen, daß das Rechteck unter den beyden Theilen einem gegebenen Quadrat gleich sey.

Die Linie AB Fig. 29. = a soll in G so getheilt werden, daß $AG \cdot GB = b^2$ sey; man nenne deshalb $AG = x$, so ist $BG = a - x$ und $AG \cdot GB = x(a-x) = b^2$ oder

$ax - x^2 = b^2$ und, wenn man mit -1 multipl.,

$x^2 - ax = -b^2$ und, wenn man $\frac{1}{4}a^2$ addirt,

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$, folglich

$x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ und

$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$.

Durch eine geometrische Construction läßt sich $AG = x$ folgendermaaßen finden: man beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in B das Perpendikel $BH = b$, lege durch H parallel mit AB die Linie EH, welche den Halbkreis in F und E schneidet, und fälle von diesen beyden Puncten Perpendikel auf AB, so ist G oder D der verlangte Theilungspunct und $AG \cdot GB = b^2$.

Beweis. Man ziehe CF, so ist $CG^2 = CF^2 - FG^2 = CB^2 - HB^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$, weil $CB = \frac{1}{2}a$ und $AB = b$ ist; also $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ und folglich $AG = AC + CG = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$ und $AD = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$.

Syn-

Synthetisch läßt sich das auf folgende Art erweisen: ist $FG = b$ auf dem Durchmesser senkrecht, so ist $AG : GF = GF : GB$, folglich $GF^2 = b^2 = AG \cdot GB$.

§. 37.

Aufgabe. Man soll eine gegebene gerade Linie um ein so großes Stück dergestalt verlängern, daß das Rechteck unter der ganzen so verlängerten Linie und dem angesetzten Stücke einem gegebenen Quadrat gleich sey.

Auflösung. Die gegebene gerade Linie sey AB Fig. 30. und ab die Seite des gegebenen Quadrats; man soll an AB ein solches Stück BD ansetzen, daß $AD \cdot BD = ab^2$ sey.

Man nenne $AB = c$, $BD = x$, so ist $AD = c + x$, ferner sey $ab = m$, so ist $AD \cdot DB = ab^2$, d. h.

$(c + x)\, x = m^2$, oder

$x^2 + cx = m^2$, und

$x^2 + cx + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 + m^2$ (§. 94. Alg.) und

$x + \frac{1}{2}c = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + m^2)}$, folglich

$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + m^2)}$.

Will man BD durch eine Construction finden, so beschreibe man über AB einen Halbkreis, errichte

richte in B ein Perpendikel $BE = ab$, ziehe CE und an F, wo CE den Halbkreis schneidet, eine Tangente, welche die unbestimmt verlängerte AB in D schneidet, so ist BD das gesuchte Stück, um welches AB verlängert werden muß, damit $AD \cdot DB = ab^2$ sey.

Daß die Construction das Nämliche giebt, was obige Formel für x enthält, erhellet so: die beyden Dreyecke CBE und CDF sind congruent, weil $CF = CB$, $C = C$ und $CFD = CBE$, ferner $CE^2 = CB^2 + BE^2 = \frac{1}{4}c^2 + m^2$, also $CE = CD = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + m^2)}$, folglich $BD = CD - CB = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + m^2)} - \frac{1}{2}c^2$ oder $-\frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + m^2)}$.

Der Lehrsatz, worauf sich der synthetische Beweis der Construction gründet, heißt: Gehen von einem Puncte, E, außerhalb der Peripherie eines Kreises zwey gerade Linien EC und EB, deren eine, EC, den Kreis schneidet, die andere, EB, denselben berührt, so ist das Rechteck unter der schneidenden Linie und ihrem außerhalb des Kreises liegenden Stücke dem Quadrat der berührenden Linie gleich, also auch $AD \cdot DB = FD^2 = BE^2 = ab^2$. Den Beweis dieses Lehrsatzes findet man beym Euklid, Elem. III. 37.

§. 38.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie, AB (Fig. 31.), soll dergestalt in zwey Theile AC und CB getheilt werden, daß das Rechteck unter dem einen Theile, AC, und einer zweyten gegebenen geraden Linie, mn, dem Quadrat des andern Theils, CB, gleich sey, oder $AC \cdot mn = CB^2$.

Auflösung. Man nenne $AB = a$, $mn = b$, $BC = x$, so ist $AC = AB - CB = a - x$, und vermöge der Bedingung der Aufgabe ist

$(a - x)\, b = x^2$, oder

$ab - bx = x^2$, und

$ab = x^2 + bx$, und

$ab + \frac{1}{4}b^2 = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2$, (§. 94. Alg.), folglich

$\pm\sqrt{(ab + \frac{1}{4}b^2)} = x + \frac{1}{2}b$, und

$-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(ab + \frac{1}{4}b^2)} = x$.

Construction. Man verlängere AB bis E, so daß $BE = mn$, beschreibe über AE und BE Halbkreise, errichte in B die senkrechte Linie BF, ziehe zum Mittelpuncte des Halbkreises über BE die Linie FD, und an den Punct G, wo FD den Halbkreis schneidet, die Tangente GC, welche auf

AB in C den Theilungspunct bestimmt, so daß BC das verlangte Stück ist.

Beweis. $AB : BF = BF : BE$, also $BF^2 = AB \cdot BE = a \cdot b$; $DF^2 = DB^2 + BF^2$, aber $DB = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}mn = \frac{1}{2}b$, also $DB^2 = \frac{1}{4}b^2$ und $BF^2 = ab$, also $DF^2 = \frac{1}{4}b^2 + ab$, also $DF = \sqrt{(ab + \frac{1}{4}b^2)}$. Die beyden Dreyecke BDF und CDG sind congruent, weil $DB = DG$, $D = D$ und in beyden ein rechter Winkel ist; deswegen ist $CD = DF = \sqrt{(ab + \frac{1}{4}b^2)}$ und $CB = CD - DB = \sqrt{(ab + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = x$.

Der zweyte Werth von x für das negative Wurzelzeichen kann, da er negativ ist, hier nicht gebraucht werden, weil dieser Werth von BC darauf deutet, daß der Theilungspunct rechter Hand von B liegen soll, welches aber unmöglich, weil von der Linie AB nichts rechter Hand von B liegt.

Synth. Beweis. Die beyden Dreyecke BDF und CDG sind, wie schon erwiesen, congruent, mithin $BF = CG$. Aber $BF^2 = AB \cdot BE$ und $CG^2 = CB \cdot CE$, folglich $AB \cdot BE = CB \cdot CE$ und, wenn man $CB \cdot BE$ auf beyden Seiten subtrahirt, so hat man $AB \cdot BE - CB \cdot BE = CB \cdot CE - CB \cdot BE$, oder $(AB - BC) \cdot BE = (CE - BE) \cdot CB$.

Aber

Aber $AB - BC = AC$ und $CE - BE = CB$, also $AC . BE = CB . CB$, oder weil $BE = mn$, so ist $AC . mn = CB^2$.

§. 39.

Aufgabe. Man soll zwey Linien finden, deren Quadrate einem gegebenen Quadrate und deren Rechteck einem gegebenen Rechteck gleich sey. Fig. 32.

Auflösung. Es sey AB die Seite des gegebenen Quadrats und DG und GF des gegebenen Rechtecks Seiten; man nenne $AB = a$, $DG = b$, $GF = c$, die beyden gesuchten Linien x und y, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ und}$$
$$x . y = bc.$$

Diese Gleichungen löst man auf, indem man den Werth von y aus der zweyten Gleichung in die erste bringt und auf die Weise x bestimmt, dessen Werth, wieder in diese Gleichung zurück gebracht, den Werth von y giebt. Aus der zweyten Gleichung ist $y = \frac{bc}{x}$, folglich

$$x^2 + \frac{b^2 c^2}{x^2} = a^2, \text{ und}$$
$$x^4 + b^2 c^2 = a^2 x^2, \text{ und}$$
$$x^4 - a^2 x^2 = - b^2 . c^2, \text{ und}$$

$x^4 -$

$x^4 - a^2 x^2 + \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2$, mithin

$x^2 - \frac{1}{2} a^2 = \sqrt{(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2)}$ und

$x^2 = \frac{1}{2} a^2 + \sqrt{(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2)}$, folglich

$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2} a^2 + \sqrt{(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2)}\right)}$.

Diesen Werth von x bringe man wieder in die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$, oder $y^2 = a^2 - x^2$, so hat man

$y^2 = a^2 - \frac{1}{2} a^2 - \sqrt{(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2)}$

$= \frac{1}{2} a^2 - \sqrt{(\frac{1}{4} a - b^2 c^2)}$ und

$y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} a^2 - \sqrt{(\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2)}\right)}$.

Construction. Man suche zu AB, DG und GF die vierte Proportional-Linie z, beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in B ein Perpendikel $BG = z$, ziehe GH parallel mit AB und ziehe endlich die Linien AH und HB, welches die gesuchten Linien sind.

Beweis. Ziehe die Hülfslinien CH und das Perpendikel HI. Da z die vierte Proportional-Linie zu AB, DG und GF ist, so ist $AB : DG = GF : z$ oder $a : b = c : z$, also $z = \frac{bc}{a} = BG = IH$.

Nun ist $CH^2 = CI^2 + IH^2$ und $CI^2 = CH^2 - IH^2$ und $CI = \sqrt{(CH^2 - IH^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}\right)}$, weil $CH = CA = \frac{1}{2} a$

und

und $IH = x = \frac{bc}{a}$ ist, also $AI = AC + CI$ $= \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)}$ und $IB = CB - CI$ $= \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)}$. AH ist die mittlere Proportional-Linie zwischen AB und AI (§. 153. Geo.), folglich $AH^2 = AB.AI = \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}$, $BH^2 = AB.BI = \frac{1}{2}a^2 - a\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)}$ $= \frac{1}{2}a^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}$, folglich

$x = AH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}\right)}$

und $y = BH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}\right)}$, wie vorhin.

Synthetischer Beweis. Weil AHB $= R$, so ist $AH^2 + HB^2 = AB^2$, welches der erste Theil der Forderung der Aufgabe ist. Ferner ist $AB : DG = GF : GB$, also $AB.GB$ oder $AB.HI = DG.GF$, aber $\frac{AB.HI}{2}$ $= \triangle ABH = \frac{AH.HB}{2}$, also $AB.HI =$ $AH.HB$, folglich $AH.HB = DG.GF$, wodurch der zweyten Forderung der Aufgabe ein Genüge geleistet wird.

§. 40.

Aufgabe. Im Endpuncte, B, (Fig. 33.) eines gegebenen Durchmessers, AB, im Halbkreise

kreise AEB ist ein Perpendikel, BC, errichtet; man soll auf diesem Perpendikel einen Punct, D, finden, so daß, wenn man von diesem Puncte, D, nach dem andern Puncte des Durchmessers, A, eine Linie, DA, ziehet, der außerhalb des Halbkreises liegende Theil derselben, DE, einer gegebenen geraden Linie, mn, gleich sey.

Auflösung. Man nenne AB = a, mn = b, AD = x und ziehe BE, so ist AEB = R und die Dreyecke ABD und AEB ähnlich, weil AEB = ABD = R und EAB gemeinschaftlich, daher

$AD : AB = AB : AE$, oder

$x : a = a : x - b$, und

$x^2 - bx = a^2$, und

$x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2$, folglich

$x - \frac{1}{2}b = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$ und

$x = \frac{1}{2}b + \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$.

Construction. Auf dem Perpendikel BC nehme man BH = mn = b, beschreibe um BH einen Kreis, ziehe durch dessen Mittelpunct O und A die Linie AF, beschreibe mit AF einen Bogen, welcher die Linie BC in D schneidet, so ist D der gesuchte Punct, durch welchen und A man die Linie DA ziehet, wo DE = mn seyn muß.

Beweis. $AO = \sqrt{(AB^2 + BO^2)} = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$, weil $AB = a$ und $BO = \frac{BH}{2} = \frac{1}{2}b$, folglich $AF = AO + OF = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}b$, welches obiger Ausdruck ist.

Synth. Beweis. $DB^2 = AD \cdot DE$ (§. 162. Geom.), $AB^2 = AF \cdot AG$, folglich $DB^2 + AB^2 = AD^2 = AD \cdot DE + AF \cdot AG$ und $AD^2 - AD \cdot DE = AF \cdot AG = AD \cdot AE$. Nun ist $AD = AF$, folglich auch $AG = AE$ und mithin $DE = GF = BH = mn$.

§. 41.

Aufgabe. Es ist ein Quadrant, ACB, (Fig. 34.) gegeben; man soll in demselben einen Kreis beschreiben, der sowohl den Bogen als die beyden Halbmesser berühre.

Auflösung. Man nenne $AC = CB = a$ und $EG = ED = EF = x$; der einbeschriebene Kreis DFG berührt den Bogen in G und die beyden Halbmesser in D und F. Da $EDC = EFC = DCF = R$ (§. 119. Geom.), folglich auch $DEF = R$, überdies $ED = EF$, so ist DEFC ein Quadrat und $ECB = \frac{R}{2}$. Die Linie CE wird verlängert durch den Berührungspunct G gehen. (§. 113. Geom.).

Nun

Nun ist $EC^2 = EF^2 + FC^2$ und $EC = \sqrt{(EF^2 + FC^2)} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$, $CG = EC + EG = x\sqrt{2} + x$, aber $EC + EG = GC = AC = CB = a$, folglich

$$x\sqrt{2} + x = a \text{ und}$$

$$x(\sqrt{2} + 1) = a, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}+1}.$$

Dividirt man a durch $\sqrt{2} + 1$, so bekommt man zum Quotienten $a\sqrt{2} - a$, also

$$x = a\sqrt{2} - a$$
$$= \sqrt{2a^2} - a.$$

Construction. Diesen Werth von x kann man folgender Gestalt construiren. Man halbire den rechten Winkel ACB durch die Linie CG, an G ziehe man die Tangente GH, welche die verlängerte CA in H schneidet, mache $CF = AH$, errichte in F die senkrechte Linie EF; aus E, wo diese die Linie CG schneidet, beschreibe man mit EF einen Kreis, welcher die verlangte Eigenschaft haben wird, daß er den Bogen und die beyden Halbmesser in G, F, D berührt.

Denn da $CGH = R$, $GCH = \frac{R}{2}$, so ist $CG = GH = a$ und $CH = \sqrt{(CG^2 + GH^2)} = \sqrt{2a^2}$, mithin $CF = AH = CH - AC = \sqrt{2a^2} - a$, wie oben.

Synth.

Synth. Beweis. Ziehe ED senkrecht auf CB, so sind die beyden Dreyecke EFC und EDC congruent, weil EDC = EFC, DCE = FCE und CE = CE, folglich DE = EF; der mit EF beschriebene Kreis geht also durch F und D und berührt also die Halbmesser CA und CB in gedachten Puncten. Ferner ist HCG $= \frac{R}{2}$ und CGH = R, mithin CG = GH; aber auch AH = CF, folglich HF = AC = CG = GH, folglich das Dreyeck HGF gleichschenklicht und HGF = HFG. Aber EGH = EFA = R, folglich EGH – FGH = EFA – GFH, d. h. EGF = EFG, folglich EG = EF. Der mit EF beschriebene Kreis geht also auch durch E.

§. 42.

Man soll ein rechtwinklichtes Dreyeck ABC (Fig. 35.) von der Beschaffenheit construiren, daß, wenn man die beyden Katheten derselben AB und BC halbirt und die Linien CD und EA nach den Halbirungspuncten D und E ziehet, CD = pq = b und AE = m = a sey.

Man nenne BD = x, so ist $CD^2 = BC^2 + BD^2$ und $CD^2 - BD^2 = BC^2 = b^2 - x^2$; folglich $BE^2 = \frac{1}{4} BC^2 = \frac{b^2 - x^2}{4}$. Ferner AE^2

$= a^2$

$= a^2 = AB^2 + BE^2 = 4x^2 + \frac{b^2 - x^2}{4} =$
$\frac{16x^2 + b^2 - x^2}{4} = \frac{b^2 + 15x^2}{4}$. Man hat also folgende Gleichung:

$$a^2 = \frac{b^2 + 15x^2}{4} \text{ und}$$
$$4a^2 = b^2 + 15x^2,$$
$$4a^2 - b^2 = 15x^2, \text{ mithin}$$
$$\frac{4a^2 - b^2}{15} = x^2, \text{ oder}$$
$$\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{15}} = x = BD.$$

Da nun vermöge der Voraussetzung $AB = 2BD$ seyn soll, so ist nun die eine Kathete des gesuchten rechtwinklichten Dreyecks gefunden.

Die andere Kathete BC findet man aus der Gleichung $BC^2 = DC^2 - BD^2 = b^2 - x^2$
$= b^2 - \frac{4a^2 - b^2}{15} = \frac{15b^2 - 4a^2 + b^2}{15} = \frac{16b^2 - 4a^2}{15}$
und $BC = \sqrt{\frac{16b^2 - 4a^2}{15}}$; denn $b^2 = x^2 + BC^2$
$= \frac{4a^2 - b^2}{15} + \frac{16b^2 - 4a^2}{15} = \frac{15b^2}{15} = b^2$.

Construction. Auf eine willkührliche Linie ZC errichte man das Perpendikel BA von unbestimmter Länge. Man mache $BF = \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}b$, aus F mit mn schneide man BZ in G; nehme auf BA ein beliebiges Stück Bk, schneide aus k mit 4 Bk die Linie BZ in l, ziehe lk und mit lk parallel

rallel die Linie GH, welche AB in H trifft. Aus H mit $\frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}b$ schneide man BC in E, mache $BC = 2BE$ und $BA = 4BH$. Darauf ziehe man AC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklichte Dreyeck.

Beweis der Construction. Vermöge der Construction ist $FG = a$ und $BF = \frac{1}{2}b$, also $BG^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2$. Ferner sind die beyden Dreyecke BGH und Bkl ähnlich, weil lk mit GH parallel; folglich $GH : BH = lk : Bk = 4 : 1$ (vermöge der Construction) und $GH = 4BH$, $GH^2 = 16BH^2$, $BG^2 = GH^2 - BH^2 = 16BH^2 - BH^2 = 15BH^2$; folglich $15BH^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2$ und $BH^2 = \frac{a^2 - \frac{1}{4}b^2}{15}$. Aber $x = \frac{1}{2}AB = 2BH$ und $\frac{1}{2}x = BH$ und $\frac{x^2}{4} = BH^2$, also $\frac{x^2}{4} = \frac{a^2 - \frac{1}{4}b^2}{15}$ und $x^2 = \frac{4a^2 - b^2}{15}$, folglich $x = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{15}}$, wie vorhin.

Synth. Beweis. Man nehme $BD = 2BH = \frac{1}{2}AB$ und ziehe CD, so ist, weil auch $BC = 2BE$, CD parallel mit HE und $CD = 2HE = pq$; folglich hat die Linie CD, welche von C nach der Mitte von AB gezogen worden, die gegebene Größe. Ferner sind die beyden Dreyecke Bkl und BGH ähnlich und deswegen

$BH : HG = Bk : kl = 1 : 4$, folglich

$HG = 4BH$; aber

$AB = 4BH$, vermöge der Construction, folglich

$HG = AB$, und daher

$GB^2 = GH^2 - BH^2 = AB^2 - BH^2$.

Aber

$AE^2 = AB^2 + BE^2$, und

$HE^2 = BH^2 + BE^2$, folglich

$AE^2 - HE^2 = AB^2 - BH^2$; aber

$AB^2 - BH^2 = GH^2 - BH^2 = GB^2$, folglich

$GB^2 = AE^2 - HE^2$. Ferner ist aber auch

$GB^2 = GF^2 - BF^2 = GF^2 - HE^2$ (weil $HE = BF = \frac{1}{2}b$); folglich

$AE^2 - HE^2 = GF^2 - HE^2$, daher

$AE^2 = GF^2$, und

$AE = GF$; aber

$GF = mn$, vermöge der Construction; folglich

$AE = mn$.

§. 43.

Aufgabe. Es ist ein Winkel BAC Fig. 36. und in demselben ein Punct D gegeben; man soll innerhalb der Schenkel des Winkels

kels einen Kreis beschreiben, welcher dieselben in P und M berührt und durch gedachten Punct D gehet.

Auflösung. Der gesuchte Kreis sey DPM und O dessen Mittelpunct. Man ziehe die Linie AO, welche den Winkel BAC halbirt; denn OPA = OMA = R (§. 119. Geom.), OP = OM und OA = OA, folglich auch AP = AM, mithin die Dreyecke POA und MOA congruent und PAO = MAO. Der Punct D ist dadurch gegeben, daß der Winkel DAE und AD bekannt sind. Man nenne den Winkel BAC = a, DAE = b, AD = c.

Betrachtet man das Dreyeck AOD, so ist in demselben AD und OAD bekannt; kann man nun noch den Winkel ODA finden, so läßt sich daraus OA und OD oder den Mittelpunct und Halbmesser des Kreises DPM herleiten. Diesen Winkel findet man aber leicht; denn AO : OP = 1 : sin. a und AO : OD = sin. ADO : sin. b, aber

OA : OP = AO : OD, mithin

1 : sin, a = sin. ADO : sin. b, und

sin. a . sin. ADO = sin. b, und

$$\text{sin. ADO} = \frac{\text{sin. b}}{\text{sin. a}}.$$

Weil nun im Dreyeck ADO außer AD und OAD auch ADO bekannt ist, so läßt sich OD und OA berechnen.

Construction. Man halbire durch AE den Winkel BAC; nehme F willkührlich; fälle aus F das Perpendikel FG; mit FH = FG schneide man AD in H und lege auch D die Linie DO mit HF parallel, so ist O des gesuchten Kreises Mittelpunct.

Beweis. FH = FG (Constr.); folglich AF : FG = AF : FH; aber AF : FG = 1 : sin. a, AF : FH = sin. AHF : sin. b, folglich 1 : sin. a = sin. AHF : sin. b und sin. AHF = sin. ADO = $\frac{\text{sin. b.}}{\text{sin. a.}}$, wie erfordert wird.

Synth. Beweis. Man ziehe OP senkrecht auf AB, so ist, weil auch FG senkrecht auf AB, OP parallel mit FG und vermöge der Construction DO mit HF; folglich AF : FG = AO : OP und AF : FH = AO : OD. Aber weil FG = FH vermöge der Construction, so ist AF : FG = AF : FH, folglich AO : OP = AO : OD, mithin OP = OD. Daß aber auch OP = OD = OM, erhellet so: man fälle auf AC das Perpendikel OM, so ist OMA

= R

$= R = OPA$, aber auch $OAP = OAM$, mithin $POA = MOA$, folglich die Dreyecke PAO und MAO congruent, also $OP = OD = OM$. Man kann also mit dem Halbmesser $OD = OP = OM$ durch die Puncte D, P, M einen Kreis legen.

Zweytes Kapitel.

Analytische Stereometrie.

§. 44.

Aufgabe. Eines Kegels ABC (Fig. 37.) Durchmesser $AB = d$ und Höhe $DC = a$, so wie eines Cylinders EFGH Höhe $HE = h$ sind gegeben; man soll den Durchmesser $EF = x$ finden, dergestalt, daß die runden Oberflächen beyder gleich sind.

Auflösung. Die runde Oberfläche des Cylinders findet man, wenn man den Umfang der Grundfläche $= \pi x$ (§. 191. Geom.) mit der Höhe $EH = h$ multiplicirt, also ist die runde Oberfläche des Cylinders $= \pi hx$ (§. 260. Geom.).

Um die runde Oberfläche des Kegels zu finden, muß man den Umfang der Grundfläche $= \pi d$ mit

der

der halben Seite des Kegels $= \frac{1}{2}$ BC multipliciren (§. 273. Geom.) Da aber diese Linie nicht gegeben ist, so muß sie im Dreyeck ABC gefunden werden, nämlich $BC^2 = DC^2 + DB^2$ (§. 93. Geom.), also $BC = \sqrt{(DC^2 + DB^2)} = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} d^2)}$ und die runde Oberfläche des Kegels $= \frac{\pi d \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} d^2)}}{2}$, also vermöge der Bedingung

$$\pi h x = \frac{\pi d \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} d^2)}}{2}$$

$$2 h x = d \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} d^2)}$$

$$x = \frac{d \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} d^2)}}{2h}$$

§. 45.

Aufgabe. Einer Kugel Durchmesser EF $= d$ (Fig. 38.) und eines Kegels ACB Höhe CD $= h$ sind gegeben; man soll den Durchmesser des Kegels AB $= x$ finden, dergestalt, daß die runden Oberflächen beyder gleich sind.

Auflösung. Die Oberfläche der Kugel ist gleich dem Vierfachen der Fläche des grösten Kreises (§. 288. Geom.); aber die Fläche des grösten Kreises ist $= \frac{\pi d^2}{4}$ (§. 195. Geom.); also die Oberfläche der Kugel $= \pi d^2$. Um die runde Oberfläche des Kegels zu finden, muß man BC suchen; nämlich $BC = \sqrt{(CD^2 + DB^2)} = \sqrt{(h^2 + \frac{1}{4} x^2)}$, welches mit der halben Peripherie der Grundfläche mul-

multiplicirt werden muß (§. 273. Geom.). Die runde Oberfläche des Kegels ist demnach $= \frac{1}{2}\pi x \sqrt{(h^2 + \frac{1}{4}x^2)}$, folglich

$$\pi d^2 = \tfrac{1}{2}\pi x \sqrt{(h^2 + \tfrac{1}{4}x^2)}$$
$$2d^2 = x\sqrt{(h^2 + \tfrac{1}{4}x^2)}$$
$$4d^4 = x^2(h^2 + \tfrac{1}{4}x^2)$$
$$4d^4 = h^2x^2 + \tfrac{1}{4}x^4$$
$$16d^4 = 4h^2x^2 + x^4$$
$$16d^4 + 4h^4 = 4h^4 + 4h^2x^2 + x^4$$
$$\pm\sqrt{(16d^4 + 4h^4)} = 2h^2 + x^2$$
$$-2h^2 \pm \sqrt{(16d^4 + 4h^4)} = x^2$$
$$\sqrt{(-2h^2 \pm \sqrt{(16d^4 + 4h^4)})} = x = AB.$$

§. 46.

Aufgabe. Einer Kugel (Fig. 38.) Durchmesser $EF = d$ und eines Kegels Durchmesser $AB = D$ sind gegeben; man soll die Höhe dieses Kegels finden, dergestalt, daß die Kubic-Inhalte beyder gleich sind.

Auflösung. Der kubische Inhalt der Kugel ist $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Cylinders (§. 285. Geom.); der kubische Inhalt des Cylinders $= \frac{\pi d^3}{4}$ (§. 258. Geom.); also ist die Kugel $= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi d^3}{4} = \frac{\pi d^3}{6}$. Der Umfang der Grundfläche des Kegels

$= \frac{\pi D^2}{4}$ (§. 198. Geom.), welche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe des Kegels oder mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt werden muß (§. 270. Geom.); demnach ist der kubische Inhalt des Kegels $= \frac{\pi D^2 x}{12}$. Folglich

$$\frac{\pi D^2 x}{12} = \frac{\pi d^3}{6}$$

$$\frac{D^2 x}{12} = \frac{d^3}{6}$$

$$D^2 x = 2 d^3$$

$$x = \frac{2 d^3}{D^2}.$$

Diese Gleichung giebt folgende Proportion: $D^2 : d^2 = 2d : x$ oder in der Figur $AB^2 : EF^2 = 2EF : CD$, aus welcher sich folgender Lehrsatz herleiten läßt:

Das Quadrat des Durchmessers des Kegels verhält sich zum Quadrat des Durchmessers der Kugel, wie der doppelte Durchmesser der Kugel zur Höhe des Kegels.

§. 47.

Aufgabe. Eines abgekürzten Kegels ABCD (Fig. 40) unterer und oberer Durchmesser oder $AB = D$ und $DC = d$ nebst der Höhe $EF = DG = h$ sind gegeben; man soll eine analytische Formel für den kubischen Inhalt desselben finden.

Auf-

Auflösung. Man verlängere oder ergänze den Kegel bis H und berechne die Höhe des abgeschnittenen Stücks DCH. Ist diese gefunden, so kann man den ganzen Kegel ABH berechnen und davon das Stück DCH subtrahiren, so hat man den abgekürzten Kegel ABCD. Da $AB = D$, so ist $AF = \frac{1}{2}D$, $DC = d$, $DE = GF = \frac{1}{2}d$, woraus folgt, daß $AG = AF - GF = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}d$.

$\triangle AGD \sim \triangle DEH$ (§. 141. Geom.)

$AG : GD = DE : EH$

$\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}d : h = \frac{1}{2}d : EH$

$\frac{\frac{1}{2}dh}{\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}d} = EH = \frac{dh}{D-d}$ (§. 29. Arith.)

Kegel DCH = Grundfl. $\frac{1}{3}$ EH (§. 270. Geom.)

$= \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{dh}{3(D-d)} = \frac{\pi d^3 h}{12(D-d)}$.

Die Höhe des großen Kegels ABH, nämlich

$FH = HE + EF = \frac{dh}{D-d} + h = \frac{dh+Dh-dh}{D-d}$

$= \frac{Dh}{D-d}$. Der kubische Inhalt des Kegels ABH

$=$ Grundfl. $\frac{1}{3}FH = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{Dh}{3(D-d)} = \frac{\pi D^3 h}{12(D-d)}$.

Von dem großen Kegel ABH subtrahire man den kleinen Kegel DCH, so findet man den abgekürzten Kegel; also $ABCD = \frac{\pi D^3 h}{12(D-d)} - \frac{\pi d^3 h}{12(D-d)}$

$= \frac{\pi h(D^3-d^3)}{12(D-d)}$.

§. 48.

§. 48.

Aufgabe. Einer Kugel Durchmesser $CH = \delta$ (Fig. 39.) und eines abgekürzten Kegels unterer Durchmesser $AB = D$, und der obere Durchmesser $DC = d$ sind gegeben; man soll die Höhe desselben $EF = x$ finden, dergestalt, daß beyder kubische Inhalte gleich sind.

Auflösung. Der kubische Inhalt der Kugel $= \frac{\pi \delta^3}{6}$ (§. 285. Geom.); aber des abgekürzten Kegels kubischer Inhalt $= \frac{\pi x (D^3 - d^3)}{12 (D-d)}$ (§. 47.); also

$$\frac{\pi x (D^3 - d^3)}{12 (D-d)} = \frac{\pi \delta^3}{6}$$

$$\frac{x (D^3 - d^3)}{12 (D-d)} = \frac{\delta^3}{6}$$

$$\frac{x (D^3 - d^3)}{D-d} = 2\delta^3$$

$$x (D^3 - d^3) = 2\delta^3 \cdot (D-d)$$

$$x = \frac{2\delta^3 (D-d)}{D^3 - d^3}.$$

Diese Gleichung läßt sich in folgende Proportion auflösen: $D^3 - d^3 : \delta^3 = 2 (D-d) : x$, oder der Unterschied der Kubi der Durchmesser des Kegels verhält sich zum Kubus des Durchmessers der Kugel, wie der doppelte Unterschied zwischen des Kegels beyden Durchmessern zur Höhe des Kegels.

§. 49.

Aufgabe. Eines abgekürzten Kegels ABCD (Fig. 39.) unterer Durchmesser AB = D und Höhe EF = h sind gegeben; man soll den obern Durchmesser CD = x finden, dergestalt, daß der kubische Inhalt des abgekürzten Kegels einer gegebenen Kugel gleich sey, deren Durchmesser CH = d ist.

Auflösung. Der kubische Inhalt der Kugel $= \frac{\pi d^3}{6}$ (§. 285. Geom.). Des abgekürzten Kegels Inhalt $= \frac{\pi h D^3 - x^3}{12 (D-x)}$ (§. 47.). Durch die Division mit $D - x$ vermeidet man die kubische Gleichung und findet den Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{\pi h (D^2 + Dx + x^2)}{12}$ (§. 57. Buchst.); also

$$\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi h (D^2 + Dx + x^2)}{12}$$

$$\frac{d^3}{6} = h \cdot \frac{(D^2 + Dx + x^2)}{12}$$

$$\frac{2 d^3}{h} = D^2 + Dx + x^2$$

$$\frac{2 d^3}{h} - D^2 = Dx + x^2$$

$$\frac{2 d^3}{h} - \frac{3 D^2}{4} = \frac{1}{4} D^2 + Dx + x^2 \text{ (§. 94. Alg.)}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{2 d^3}{h} - \frac{3 D^2}{4}\right)} = \frac{1}{2} D + x$$

$$-\frac{1}{2} D \pm \sqrt{\left(\frac{2 d^3}{h} - \frac{3 D^2}{4}\right)} = x = DC.$$

§. 50.

Aufgabe. Man soll von einem gegebenen Kegel ABC (Fig. 41.) einen kleinern Kegel DEC abschneiden, der einem gegebenen Cylinder IFGH gleich sey.

Auflösung. $AB = D$, $KC = H$, $IF = d$, $FG = h$, $DE = x$, $LC = y$.

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (§. 148. Geom.)

$AB : KC = DE : LC$ (§. 150. Geom.)

$$D : H = x : y$$

$$Dy = Hx$$

$$\frac{Dy}{H} = x \text{ und } y = \frac{Hx}{D} \text{ und}$$

$$\frac{D^2y^2}{H^2} = x^2.$$

Kegel DCE = Grundfl. $\frac{1}{3} LC = \frac{\pi x^2}{4} \cdot \frac{y}{3}$

$= \frac{\pi x^2 y}{12}$. Man substituire für x den gefundenen Werth, so ist $DCE = \frac{\pi D^2 y^3}{12 H^2}$. Cylinder =

Grundfl. $FG = \frac{\pi d^2 h}{4}$; also

$$\frac{\pi D^2 y^3}{12 H^2} = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

$$D^2 y^3 = 3 d^2 H^2 h$$

$$y^3 = \frac{3 d^2 H^2 h}{D^2}$$

$$LC = y = \frac{\sqrt[3]{3 d^2 H^2 h}}{\sqrt[3]{D^2}}.$$

Will

Will man DE = x finden, so ist $x = \frac{Dy}{H}$, also $x^3 = \frac{D^3 y^3}{H^3}$ und, wenn man den Werth von y^3 substituirt,

$$x^3 = \frac{3 D^3 d^2 H^2 h}{H^3 D^2}$$

$$x^3 = \frac{3 D d^2 h}{H}$$

$$x = DE = \frac{\sqrt[5]{3 D d^2 h}}{\sqrt[5]{H}}.$$

§. 51.

Aufgabe. Auf dem grösten Kreise einer Kugel AB (Fig. 42.) soll ein Kegel ABD beschrieben werden, so daß beyder Kubic-Inhalt gleich ist.

Auflösung. AB = d, CD = x, Kugel $= \frac{\pi d^3}{6}$ (§. 286. Geom.), Kegel $= \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{x}{3}$ $= \frac{\pi d^2 x}{12} = \frac{\pi d^3}{6}$, $d^2 x = 2 d^3$, $x = \frac{2 d^3}{d^2} = 2 d$ = CD oder die Höhe des Kegels ist doppelt so groß als der Durchmesser der Kugel.

§. 52.

Aufgabe. Einer Kugel Durchmesser = d ist gegeben; man soll die Seite DC (Fig. 43.) eines Hexaëders oder Kubus finden, der sich in der Kugel beschreiben läßt.

Auf-

Auflösung. Wenn der Kubus in der Kugel beschrieben ist, so müssen alle dessen Ecken A, B, C, D, E, u. s. w. in der Kugelfläche stehen und DF der Durchmesser der Kugel $=$ d seyn. Die Seite des Kubus $BF = BC = DC = x$. Im $\triangle DCB$ ist $DB^2 = BC^2 + DC^2$ (§. 93. Geom.) oder $DB^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$. Ferner im Dreyeck DBF ist $DF^2 = DB^2 + BF^2$; also $d^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$, $\frac{1}{3}d^2 = x^2$ und $\sqrt{\frac{1}{3}d^2} = x$, und $d = x.\sqrt{3}$ (§. 70. Buchst.) und $x : d = 1 : \sqrt{3}$ (§. 97. Arith.), oder die Seite des Kubus verhält sich zum Durchmesser der umschriebenen Kugel, wie $1 : \sqrt{3}$.

§. 53.

Aufgabe. Der Radius eines Kreises $AC = r$ (Fig. 44.) ist gegeben; man soll die Seite $DB = x$ eines gleichseitigen in dem Kreise beschriebenen Dreyecks BGD finden.

Auflösung. Man beschreibe im Kreise ein regulaires Sechseck ABFGHD, indem man den Radius des Kreises sechsmal auf die Peripherie absetzt, also $AB = AC = r$ (§. 170. Geom.). Man ziehe BD senkrecht auf AC (§. 44. Geom.), so ist $DE = EB = \frac{1}{2}x$ (§. 108. Geom.). In den Dreyecken CEB und AEB sind bey E

rechte

rechte Winkel, Hypotenuse $BC = BA$ und $EB = EB$, also $CE = AE$ (§. 58. Geom.). Im Dreyeck CEB ist $CB^2 = CE^2 + EB^2$ (§. 93. Geom.) und $CB^2 - CE^2 = EB^2$, oder $r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$ oder $\frac{3}{4}r^2 = \frac{1}{4}x^2$ und $3r^2 = x^2$ und $\sqrt{3r^2} = x$ oder $r\sqrt{3} = x$ (§. 70. Buchst.)

Aus diesen Gleichungen lassen sich folgende Lehrsätze herleiten:

1) Die Seite des gleichseitigen Dreyecks ist die mittlere Proportional-Linie zwischen dem dreydoppelten Radius und dem einfachen Radius, denn $3r : x = x : r$ (§. 79. Arith.).

2) Das Quadrat der Seite des Dreyecks verhält sich zum Quadrat des Radius, wie 3 : 1, denn $x^2 : r^2 = 3 : 1$.

§. 54.

Aufgabe. Einer Kugel Durchmesser $AB = d$ (Fig. 45.) ist gegeben; man soll die Seite eines in derselben beschriebenen Tetraeders $AD = x$ finden.

Auflösung. Das Tetraeder wird eingeschlossen von vier gleichseitigen und gleich großen Dreyecken (§. 239. Geom.); der Radius CD desjenigen

jenigen Kreises, in welchem sich eines dieser Dreyecke beschreiben läßt, ist $= \sqrt{\frac{1}{3}x^2}$ (§. 53.). Man nenne $AC = y$, so ist $CB = d - y$. Im Dreyeck ADC ist $AD^2 = AC^2 + CD^2$ oder $x^2 = y^2 + \frac{1}{3}x^2$ und $\frac{2}{3}x^2 = y^2$ und $\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = y$. Ferner $AC : CD = CD : CB$ (§. 158. Geo.), oder $y : \sqrt{\frac{1}{3}x^2} : \sqrt{\frac{1}{3}x^2} : d-y$, also $dy - y^2 = \frac{1}{3}x^2$ (§. 73. Buchst.); nun ist aber $y^2 = \frac{2}{3}x^2$, daher $dy = x^2$, aber $y = \sqrt{\frac{2}{3}x^2}$, also $d\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = x^2$. Quadrirt und dividirt man diese Gleichung mit x^2, so ist $\frac{2}{3}d^2x^2 = x^4$ und $\frac{2}{3}d^2 = x^2$ und $\sqrt{\frac{2}{3}d^2} = x$.

Aus diesen Gleichungen folgt, daß $x^2 : d^2 = 2 : 3$ oder das Quadrat der Seite des Tetraeders verhält sich zum Quadrat des Durchmessers der umschriebenen Kugel, wie 2 : 3.

Anmerk. Aus der Auflösung der drey letzten Aufgaben erhellt leicht, wie man die Seite eines in der Kugel beschriebenen Octaeders, Dodekaeders und Ikosaeders finden kann. Nach solchen algebraischen Formeln sind folgende Verhältnisse berechnet:

Durchmesser der umschriebenen Kugel	= 100000	Theile.
Seite des eingeschriebenen Tetraeders	81649	—
Seite des eingeschriebenen Kubus	57736	—
Seite des eingeschriebenen Octaeders	70710	—
Seite des eingeschriebenen Dodekaeders	35682	—
Seite des eingeschriebenen Ikosaeders	32537	—

Ueber diese Materie kann man nachsehen: Developement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques par L. Bertrand, Geneve 1778 in 4to. Tom. 2. p. 272 – 286.

§. 55.

Aufgabe. Eines Kreises Durchmesser FD = LM = d (Fig. 46.) ist gegeben; man soll die Seite AB = x eines gleichseitigen um den Kreis beschriebenen Dreyecks finden.

Auflösung. Im Dreyeck ADC ist $CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)}$ (§. 93. Geom.) oder $CD = (x^2 - \frac{1}{4}x^2) = \sqrt{\frac{3}{4}x^2}$. NE ist senkrecht auf AC (§. 119. Geom.) und N = D = R und C gemeinschaftlich, also $\triangle ADC \sim \triangle CNE$ und $CD : AD = CN : NE$ (§. 148. Geom.) oder $\sqrt{\frac{3}{4}x^2} : \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x : \frac{1}{2}d$, also $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}d \cdot \sqrt{\frac{3}{4}x^2}$. Man quadrire die Gleichung $\frac{1}{16}x^4 = \frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{16}d^2x^2$ und, mit 16 multiplicirt,

$$x^4 = 3d^2x^2 \text{ und}$$
$$x^2 = 3d^2 \text{ und}$$
$$AB = x = \sqrt{3d^2} = d\sqrt{3}.$$

Die Gleichung $x^2 = 3d^2$ giebt folgende Proportion: $3d : x = x : d$ oder die Seite

AB eines um den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreyecks ABC ist die mittlere Proportional-Linie zwischen dem dreyfachen und einfachen Durchmesser des Kreises.

Hieraus läßt sich noch ein neuer Lehrsatz herleiten, daß nämlich CF = FE = ED oder CE = FD, dem Durchmesser des Kreises gleich ist.

$$\triangle ADC \sim \triangle CNE$$

$$AC : AD = CE : EN$$

$$x : \frac{x}{2} = CE : \frac{d}{2}$$

$$d\sqrt{3} : \frac{d\sqrt{3}}{2} = CE : \frac{d}{2}$$

$$CE \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{d^2\sqrt{3}}{2}$$

$$CE = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} : \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{d\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2d^2\sqrt{3}}{2d\sqrt{3}} = d = DF.$$

§. 56.

Um eine gegebene Kugel LFMD (Fig. 46.), deren Durchmesser DF = d, ist ein Cylinder GHIK und ein senkrechter Kegel ABC beschrieben; es soll bewiesen werden, daß sich die ganzen Oberflächen dieser 3 Körper wie 9, 6, 4 verhalten.

1) Oberfläche des Kegels ABC.

Durchmesser des Kegels = AB = $d\sqrt{3}$ (§. 32.) und die Peripherie = $\pi d\sqrt{3}$ (§. 191. Geom.)

Geom.); aber $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = \frac{d\sqrt{3}}{2}$; also die runde Oberfläche des Kegels = Peripherie $AB \cdot \frac{1}{2}AC = \pi d\sqrt{3} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi d^2}{2}$.

Die Grundfläche des Kegels = $\frac{3\pi d^2}{4}$ (§. 195. Geom.), also die ganze Oberfläche = $\frac{3\pi d^2}{4} + \frac{3\pi d^2}{2}$ = $\frac{3\pi d^2}{4} + \frac{6\pi d^2}{4} = \frac{9\pi d^2}{4}$.

2) Die Oberfläche des Cylinders GHIK.

Die runde Oberfläche des Cylinders = Periph. GH. HI (§. 260. Geom.) = πd^2; die Fläche der beyden Grundflächen = $\frac{2\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{2}$; also die ganze Oberfläche des Cylinders = $\pi d^2 + \frac{\pi d^2}{2}$ = $\frac{2\pi d^2}{2} + \frac{\pi d^2}{2} = \frac{3\pi d^2}{2} = \frac{6\pi d^2}{4}$.

3) Die Oberfläche der Kugel LMFD.

Die Oberfläche der Kugel ist = $\frac{4\pi d^2}{4} = \pi d^2$ (§. 288. Geom.). Aus allen diesen Formeln folgt, daß die ganzen Oberflächen des Kegels, des Cylinders und der Kugel sich verhalten = $\frac{9\pi d^2}{4} : \frac{6\pi d^2}{4} : \frac{4\pi d^2}{4}$ = $9\pi d^2 : 6\pi d^2 : 4\pi d^2 = 9 : 6 : 4$.

§. 57.

Unter der nämlichen Voraussetzung, wie im vorigen Paragraphen, verhalten sich ge-

dachter drey Körper kubische Inhalte wie 9, 6, 4.

1) Inhalt des Kegels ABC.

Grundfläche $AB = \frac{3\pi d^2}{4}$ (§. 56. Num. 1.) und $\frac{1}{3}CD = \frac{3d}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{d}{2}$. Kegel $ABC = \frac{3\pi d^2}{4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{3\pi d^3}{8} = \frac{9\pi d^3}{24}$.

2) Inhalt des Cylinders GHIK.

$GHIK =$ Grundfl. $GH \cdot GK = \frac{\pi d^2}{4} \cdot d = \frac{\pi d^3}{4}$ (§. 258. Geom.) $= \frac{6\pi d^3}{24}$.

3) Inhalt der Kugel LMFD.

Kugel $LMFD =$ Grundfl. $LM \cdot \frac{2}{3}DF = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{2}{3}d = \frac{2\pi d^3}{12} = \frac{4\pi d^3}{24}$.

Aus diesen drey Formeln folgt, daß gedachte drey Körper, nämlich Kegel, Cylinder und Kugel, sich verhalten wie

$\frac{9\pi d^3}{24} : \frac{6\pi d^3}{24} : \frac{4\pi d^3}{24} = 9\pi d^3 : 6\pi d^3 : 4\pi d^3 = 9 : 6 : 4.$

§. 58.

Lehrsatz. Der kubische Inhalt eines abgekürzten Kegels ABDE (Fig. 47.) ist dem kubischen Inhalte eines ganzen Kegels gleich, wenn

wenn beyde gleiche Höhe haben und des letztern Grundfläche der Summe beyder Kreisflächen des abgekürzten Kegels und einer mittlern Proportionalfläche zwischen beyden Kreisflächen ist.

Man nenne den Flächeninhalt der größern Kreisfläche des abgekürzten Kegels $= m^2$, des kleinern $= n^2$, ferner des ganzen Kegels Höhe oder $FC = a$, des kleinern Kegels oder $FG = b$, so ist die Höhe des abgekürzten Kegels oder $GC = a - b$. Der kubische Inhalt des größern Kegels ist also $= \frac{m^2 a}{3}$ (Stereom. §. 274.) und des kleinern $= \frac{n^2 b}{3}$, mithin des abgekürzten Kegels $= \frac{m^2 a}{3} - \frac{n^2 b}{3} = \frac{m^2 a - n^2 b}{3}$. Da $m^2 : mn = mn : \frac{m^2 n^2}{m^2} = n^2$, so ist die Fläche mn die mittlere Proportionalfläche zwischen m^2 und n^2. Es soll also erwiesen werden, daß

$$\frac{m^2 a - n^2 b}{3} = \frac{a-b}{3}(m^2 + n^2 + mn)$$
$$= \tfrac{1}{3}(am^2 + an^2 + amn - bm^2 - bn^2 - bmn).$$

Es sey ABF ein Durchschnitt des Kegels durch dessen Achse, so ist

$AB : ED = CF : GF = a : b$, ferner
$m^2 : n^2 = AB^2 : ED^2$ (Gem. §. 195.) und
$m : n = AB : ED$, also
$m : n = a : b$, und
$mb = na$.

Setzt

Setzt man nun na statt mb in obige Gleichung $\frac{m^2a - n^2b}{3}$

$= \frac{1}{3}(am^2 + an^2 + amn - bm^2 - bn^2 - bmn)$,

so bekommt man $\frac{m^2a - n^2b}{3}$

$= \frac{1}{3}(am^2 + an^2 + amn - amn - bn^2 - an^2)$,

und, wenn man wegstreicht, was sich aufhebt, so hat man

$$\frac{m^2a - n^2b}{3} = \frac{1}{3}(am^2 - bn^2) = \frac{m^2a - n^2b}{3}.$$

§. 59.

Aufgabe. Der körperliche Inhalt einer Kugel ist gegeben; man verlangt einen Kegel, dessen körperlicher Inhalt dem der Kugel und dessen Höhe dem Radius derselben gleich ist.

Auflösung. Der Durchmesser der Kugel sey $= 1$, so ist der körperliche Inhalt derselben $= \frac{\pi l^3}{6}$ und der Inhalt eines Kegels, dessen Höhe $= \frac{1}{2}l$ und dessen Grundfläche $= x$, ist $= \frac{1}{6}lx$ (Stereom. §. 286. und 270). Nach der Bedingung soll also $\frac{\pi l^3}{6} = \frac{lx}{6}$ seyn, folglich

$$\pi l^3 = lx, \text{ und}$$

$$\pi l^2 = x.$$

Wenn nämlich $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang ist, so ist πl der Umfang

fang der Kugel und $\frac{\pi l^2}{4}$ die Fläche des grösten Kreises derselben; πl^2 also das Vierfache der grösten Kreisfläche der Kugel. Da x oder die Grundfläche des Kegels nun $= \pi l^2$ ist, so muß dieselbe der vierfachen grösten Kreisfläche der Kugel gleich seyn.

§. 60.

Aufgabe. Das Verhältniß der körperlichen Inhalte des Cylinders, des Kegels und der Kugel zu finden, wenn der Durchmesser der Kugel dem Durchmesser der Grundfläche des Cylinders und Kegels, so wie der Höhe beyder gleich ist.

1) Körperlicher Inhalt des Cylinders.

Es sey der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders $= d$, so ist die Peripherie desselben $= \pi d$ und der Inhalt der Grundfläche $= \frac{\pi d^2}{4}$ und der körperliche Inhalt des Cylinders $= \frac{\pi d^3}{4}$ (Stereom. §. 258.).

2) Körperlicher Inhalt des Kegels.

Grundfläche desselben, wie beym Cylinder, $= \frac{\pi d^2}{4}$ und körperlicher Inhalt $= \frac{\pi d^3}{12}$ (Stereom. §. 270.).

3)

3) Körperlicher Inhalt der Kugel.

Inhalt der Kugel $= \frac{\pi d^3}{6}$ (Stereom. §. 286.).

Folglich Cyl. : Keg. : Kugel $= \frac{\pi d^3}{4} : \frac{\pi d^3}{12} : \frac{\pi d^3}{6}$

und, wenn man durch πd^3 dividirt,

Cyl. : Keg. : Kugel $= \frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{1}{6}$, oder

$= \frac{1}{2} : \frac{1}{6} : \frac{1}{3}$, und

$= 1 : \frac{2}{6} : \frac{2}{3}$, oder

$= 1 : \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$

$= 3 : 1 : 2.$

Hieraus folgt, daß vom Cylinder der Kegel den dritten Theil und die Kugel $\frac{2}{3}$ ausmacht, ihre Summe also dem Cylinder gleich ist oder sie sich wie 3, 1, 2 verhalten.

Im 57sten §. der analytischen Stereometrie ist das Verhältniß der kubischen Inhalte dieser 3 Körper wie 6, 9, 4 gefunden, hier wie 3, 1, 2; der Unterschied liegt darin, daß hier der Kegel in der Kugel, dorten um dieselbe beschrieben ist.

§. 61.

Lehrsatz. Die krumme Oberfläche eines senkrechten Kegels (d. h. ohne die Grundfläche) ist einer Kreisfläche gleich, deren Halbmesser die mittlere Proportional-Linie ist zwischen der Seite des Kegels und dem Halbmesser der Grundfläche des Kegels.

Die

Die Seite des Kegels nenne man a, den Halbmesser der Grundfläche r, so ist die krumme Oberfläche des Kegels $= \pi r a$ (Ster. §. 273.). Diese krumme Oberfläche sey einer Kreisfläche gleich, deren Radius oder Halbmesser z heißen mag, so ist der Inhalt dieser Kreisfläche $= \pi z^2$, und also $\pi r a = \pi z^2$ und $r a = z^2$ und $r : z = z : a$, folglich z die mittlere Proportional-Linie zwischen a und r, oder der Seite des Kegels und dem Halbmesser der Grundfläche desselben.

§. 62.

Lehrsatz. Die krumme Oberfläche eines senkrechten Cylinders ist einer Kreisfläche gleich, deren Radius oder Halbmesser die mittlere Proportional-Linie zwischen der Seite und dem Durchmesser der Grundfläche des Cylinders ist.

Man nenne die Seite des Cylinders m, den Durchmesser der Grundfläche n, so ist die krumme Oberfläche des Cylinders (d. h. ohne die beyden Grundflächen) $\pi n m$ (Ster. §. 260.). Diese krumme Oberfläche sey einer Kreisfläche gleich, deren Halbmesser wir x nennen wollen, so ist der Inhalt der Kreisfläche $= 2 \pi x \cdot \frac{1}{2} x = \pi x^2$; also $\pi n m = \pi x^2$ und, wenn man durch π di-

vidirt,

vidirt, $nm = x^2$, also $m : x = x : n$; folglich x die mittlere Proportional-Linie zwischen der Seite des Cylinders und dem Durchmesser der Grundfläche desselben.

§. 63.

Aufgabe. Das Verhältniß der krummen Oberfläche eines Cylinders und eines Kegels von gleicher Höhe und Grundfläche zu bestimmen, oder wenn ersterer um letzteren beschrieben ist. Fig. 48.

Auflösung. Die krumme Oberfläche des Cylinders $= \pi nm$ (Stereom. §. 260.) und des Kegels $= \frac{\pi nr}{2}$, wenn man $ED = r$ nennt (Stereom. §. 273.). Beyde verhalten sich also wie $\pi nm : \frac{\pi nr}{2} = m : \frac{r}{2}$. Es ist aber $r^2 = m^2 + \frac{1}{4}n^2$ und $r = \sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}n^2)}$ und $\frac{r}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}n^2)}$. Beyder krumme Oberflächen verhalten sich also wie $m : \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}n^2)} = 2m : \sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}n^2)}$.

Setzt man beyde Flächen gleich oder $\pi nm = \frac{\pi nr}{2} = \pi n \cdot \sqrt{\frac{(m^2 + \frac{1}{4}n^2)}{2}}$, so ist, wenn durch πn dividirt, $m = \sqrt{\frac{(m^2 + \frac{1}{4}n^2)}{2}}$ oder $2m = \sqrt{(m^2 + \frac{1}{4}n^2)}$ und, wenn man quadrirt,

dirt, $4m^2 = m^2 + \frac{1}{4}n^2$ und $2m^2 = \frac{1}{4}n^2$ und $8m^2 = n^2$ und $\sqrt{8m^2} = n = m\sqrt{8}$ $= m \cdot 2{,}828....$

Sollen also ein Cylinder und ein Kegel bey gleicher Höhe gleiche krumme Oberflächen haben, so muß der Durchmesser der Grundfläche des Kegels oder $n = m \cdot 2{,}828....$ seyn.

Man setze aber $\pi nm = \frac{\pi nr}{2}$, so ist, wenn man durch πn dividirt, $m = \frac{r}{2}$ und $2m = r$.

Sollen also beyder krumme Oberflächen bey gleicher Grundfläche gleich seyn, so muß die Seite des Kegels der doppelten Höhe des Cylinders gleich seyn.

§. 64.

Lehrsatz. Die sphärische Oberfläche des Kugelabschnitts EFI (Fig. 49.) ist einer Kreisfläche gleich, deren Halbmesser der Sehne EF gleich ist.

Die sphärische Oberfläche des Kugelabschnitts ist der cylindrischen gleich, welche beschrieben wird, wenn GAFK sich um FK ganz herum drehet (Stereom. §. 290. 3.). Die krumme Oberfläche des Cylinders ist aber einer Kreisfläche gleich, deren Halbmesser die mittlere Proportional-Linie zwi-

schen

schen der Seite des Cylinders und dem Durchmesser von dessen Grundfläche ist (§. 62.), d. h. zwischen AG und GH oder $= \sqrt{AG \cdot GH}$ $= \sqrt{FK \cdot FL}$. Man ziehe EL, so ist $\triangle FEK \sim \triangle FEL$ und $FK : FE = FE : FL$, folglich $FE^2 = FK \cdot FL$ oder $FE = \sqrt{FK \cdot FL}$. Folglich ist die sphärische Oberfläche des Kugelabschnitts der Kreisfläche gleich, deren Halbmesser $= FE$ ist. Dies ist ein anderer Beweis für §. 294. der Stereometrie.

§. 65.

Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen Linien M und N (Fig. 50.) zwey mittlere Proportional-Linien zu finden.

Auflösung. Aus den gegebenen geraden Linien M und N construire man das Rechteck ABCD, so daß $DC = M$, $AD = N$. Darauf ziehe man die Diagonal-Linien AC und DB, welche sich in E schneiden. Man schneide mit einer geraden Linie IK durch B die verlängerten Seiten des Rechtecks, dergestalt, daß $IE = KE$ wird, so sind IA und CK die verlangten mittlern Proportional-Linien zwischen M und N oder AD und DC.

Beweis. Weil IE = KE, so läßt sich aus E mit IE = KE durch I und K ein Kreis beschreiben; man verlängere ID und KD rückwärts bis an die Peripherie des Kreises und fälle aus E die senkrechten Linien EF und EL auf AD und DC. Da nun GL = LK (Geom. §. 108.) und DL = CL, so ist GL – DL = LK – CL oder GD = CK. Daß aber DL = CL, erhellet so: AD = BC, DC = DC, ADC = BCD, folglich △ADC = △BCD und ACD = BDC, mithin das Dreyeck EDC gleichschenklicht und ED = EC, übrigens bey L rechte Winkel und also LEC = LED, folglich △EDL = △ECL, und also DL = CL. Eben so läßt sich erweisen, daß IF = FH und AF = FD und also IA = DH. Ferner ist GHD = DKI (Geom. §. 124.) und GDH = IDK (Geom. §. 34.) und daher △GDH ∽ △IDK ∽ △IAB ∽ △BCK, woraus folgt, daß AB : AI = HD : GD = CK : CB und, weil AB = DC, IA = HD; CK = GD, CB = AD, so ist DC : HD = HD : CK = CK : AD. Folglich sind HD und CK oder IA und CK die verlangten mittlern Proportional-Linien.

Anmerk.

Anmerk. Die Auflösung dieser Aufgabe ist, wie sie hier bewerkstelliget worden, nicht rein geometrisch, weil die Ziehung der Linie IK durch den Punct B, dergestalt, daß IE = KE, nur auf eine mechanische Weise geschehen kann, indem man das Lineal scharf an B anlegt und so lange um diesen Punct herum bewegt, bis man vermittelst eines Zirkels IE = EK findet. Durch die Elementar-Geometrie läßt sich diese Aufgabe nicht rein geometrisch auflösen, indem dies nur durch Hülfe zweyer krummen Linien, z. B. der Parabel und des Kreises, möglich ist, welches weiter unten vorkommen wird. Auf die Auflösung dieser wichtigen Aufgabe beruht die Verdoppelung des Würfels und die Construction eines Würfels, der einem gegebenen rechtwinklichten Parallelepipedum gleich ist.

§. 66.

Aufgabe. Es ist ein Würfel oder Cubus ACGE (Fig. 51.) gegeben; man soll die Seite eines andern Cubus finden, der zweymal so groß ist, so daß beyde sich verhalten wie 1 : 2.

Auflösung. Man nenne die beyden zwischen N und M (§. 65.) gefundenen mittlern Proportional-Linien X und Y, so ist $N : X = X : Y = Y : M$ und $N : X : Y : M$ und $N^3 : X^3 = N : M$ (Arith. §. 95.). Drückt also $N : M$ das Verhältniß der Cubi aus, hier wie 1 : 2, so ist X^3 derjenige Cubus, der das verlangte

langte Verhältniß zu dem gegebenen hat, indem die erste mittlere Proportional-Linie die Seite des gesuchten Cubus und N des gegebenen ist. M ist hier = 2N und X die Seite des Cubus, der zweymal so groß als der Cubus Fig. 51. ist.

Um also einen gegebenen Cubus zu verdoppeln, d. h. einen Cubus oder die Seite eines Cubus zu finden, der zweymal so groß als ein gegebener ist, muß man zur Seite des gegebenen Cubus und einer Linie, die zweymal so groß als die Seite des gegebenen Cubus ist, zwey mittlere geometrische Proportional-Linien suchen, deren erste die Seite des gesuchten zweymal so großen Cubus ist.

Man ersieht hieraus leicht, daß, wenn man einen gegebenen Cubus 3, 4, 5, . . . m mal größer machen oder die Seite eines Cubus finden wollte, der 3, 4, 5, . . . m größer seyn sollte, man nur nöthig habe, zur Seite des gegebenen Cubus oder N und zu einer geraden Linie, die 3, 4, 5, ... m größer ist als N, zwey mittlere geometrische Proportional-Linien zu finden, deren erste oder X die Seite des 3, 4, 5, ... m mal größern Cubus ist.

Anmerk. Dies ist die im Alterthum berühmt gewordene delische Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels oder die Seite eines Würfels zu finden, welcher doppelt so groß als ein gegebener ist. Sie beruht, wie

wir

wir gesehen haben, auf der Bestimmung zweyer mittlern Proportional-Linien zwischen zwey gegebenen Linien, deren eine die Seite des gegebenen Würfels und die andere doppelt so groß ist. Diese Aufgabe ist den alten Geometern durch die Umstände, die sie der Sage nach veranlaßten und noch mehr dadurch, daß sie durch die Elementar-Geometrie nicht aufzulösen ist, sondern auf Untersuchungen höherer Art führt, sehr wichtig geworden. Die Sage erzählt nämlich, der König Minos habe seinem Sohne Glaucus ein Grabmahl errichten lassen. Da die Bauleute es 100 Fuß lang, breit und hoch gemacht hatten, fand der König es zu klein und verlangte ein doppelt so großes Grabmahl. Hier entstand nun die Frage, wie groß die Seite des neuen Grabmahls oder des Würfels seyn müßte, welcher noch einmal so groß als der vorige wäre. Einer zweyten Sage zufolge wurden bey einer Pest, die das athenienfische Gebiet verheerte, Abgeordnete nach Delos gesandt, um das Orakel über die Mittel zur Versöhnung der Götter zu befragen. Das Orakel gab zur Antwort, Apollo verlange die Verdoppelung seines Altars, der ein Würfel war. Die Seite des Würfels ward demnach verdoppelt; aber die Pest ließ nicht nach. Eine zweyte nach Delos abgesandte Deputation erhielt zur Antwort: dem Verlangen des Apollo sey kein Genüge geschehen, indem der Altar ein Würfel bleiben solle. Nun wurden die Geometer und unter diesen vor allen Plato, als der erste und vornehmste derselben, um Rath befragt. Sey nun aber diese oder jene Begebenheit die Veranlassung zu dieser Aufgabe oder, was wahrscheinlicher ist, derselben nur eine solche Veranlassung angedichtet, um ihr dadurch eine vermeintlich größere Wichtigkeit zu geben: so hat dennoch

noch die Auflösung dieser Aufgabe den Fleiß fast aller alten Geometer sehr beschäfftigt. Plato erfand eine Art von Parallel-Linial zur mechanischen Auflösung. Menächmus gebrauchte den Durchschnitt einer Parabel und Hyperbel, auch den Durchschnitt zweyer Parabeln zur Auflösung dieser Aufgabe. Auch Apollonius von Pergä beschäfftigte sich mit derselben; aber sein Verfahren ist nicht zu uns gekommen. Hero von Alexandrien und Philo von Byzanz haben Constructionen erdacht, die durch Probiren das Gesuchte geben. Die hier mitgetheilte Auflösung zur Bestimmung zweyer mittlern Proportionalen ist die des Hero. Nikomedes erfand zur Auflösung dieser Aufgabe die Conchoide, Diokles die Cissoide. Diese Methoden lassen sich aber erst in der Lehre von den Kegelschnitten und von den Curven höherer Ordnung entwickeln.

§. 67.

Aufgabe. Es ist ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, BADC, (Fig. 52.) gegeben; man soll einen Cubus finden, der eben so groß ist.

Auflösung.

1) Man suche eine mittlere Proportionallinie EF zwischen den Seiten der Grundfläche AB und AD.

2) Man bestimme zwey mittlere Proportional-Linien zwischen EF und AC, deren erstere GH seyn mag. Diese ist die Seite des gesuchten Würfels.

Beweis. Man nenne $AB = a$, $AD = b$, $AC = c$, $EF = d$ und $GH = m$. Weil m die erstere mittlere Proportional-Linie zwischen d und c, so ist, wenn wir die zweyte n nennen wollen, $d : m = m : n = n : c$, folglich $d : c = d^3 : m^3$ und $m^3 = \frac{c\,d^3}{d} = c\,d^2 = abc$, weil $d^2 = ab$. Also $GH^3 = AB . AD . AC$.

Sind die Dimensionen des Parallelepipedums in Zahlen gegeben, so giebt die Ausziehung der Cubicwurzel aus dem Producte derselben die Auflösung dieser, so wie der delischen Aufgabe unmittelbar; sind aber dieselben nur als Linien gegeben, so lassen sich diese Aufgaben nur auf die erklärte Weise auflösen.

Drittes Kapitel.

Analytische Trigonometrie.

§. 68.

Der Sinus DE (Fig. 53.) eines Bogens, der kleiner als 90° ist, ist kleiner als der Halbmesser; er wächst mit dem Bogen bis 90°; der Sinus von 90° ist dem Radius gleich; der Sinus eines Bogens über 90° wird kleiner als der Halbmesser und

Sin.

Sin. $180° = 0$. Die Sinus zweyer Bogen, die sich zu $180°$ ergänzen, sind gleich groß. Der Sinus eines Bogens von mehr als $180°$ fällt unterhalb des Durchmessers, ist also dem Sinus eines Bogens unter $180°$ entgegengesetzt, also negativ, wenn jener positiv angenommen wird. Der Sinus eines Bogens zwischen $180°$ und $360°$ bleibt negativ, bis Sin. $360° = 0$ wird.

Alle trigonometrische Linien des ersten Quadranten werden positiv angenommen.

Die Sinus im ersten und zweyten Quadranten sind positiv, im dritten und vierten negativ.

Sin. $30° = \frac{1}{2}$ Chord. $60° = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}$ ($r = 1$ angenommen).

Sin. $45° = \frac{1}{2}$ Chord. $90° = \frac{1}{2}r\sqrt{2r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sin. $30° =$ Sin. $(180° - 30°) =$ Sin. $150°$.
(§. 6. ebene Trig.).

Sin. $45° =$ Sin. $(180° - 45°) =$ Sin. $135°$.

$+$ Sin. $a = +$ Sin. $(2R - a) = -$ Sin. $(2R + a)$
$= -$ Sin. $(4R - a)$,

§. 69.

Im ersten Quadranten nimmt der Cosinus EC ab, wie der Bogen wächst, für $90°$ wird der Cosinus $= 0$, Cos. $0° = r = 1$; der Cosinus

eines Bogens über 90° ist negativ, Cos. 180° $= -r = -1$. Der Cosinus eines Bogens über 180° ist noch negativ und nimmt ab, wird für 370° $= 0$ und geht für Bogen über 370 durch 0 ins Entgegengesetzte über oder wird positiv und für 360° $= +1$, also Cos. 0° $=$ Cos. 360° $= +r = +1$.

Die Cosinus sind also im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweyten und dritten negativ.

$$\text{Cos. } 30° = \text{Sin. } 60° = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}r^2)} = \sqrt{\tfrac{3}{4}r^2} = \frac{\sqrt{3r^2}}{\sqrt{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(r = 1 gesetzt).

$$\text{Cos. } 45° = \text{Sin. } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§. 70.

Die Tangente wächst im ersten Quadranten mit dem Bogen bis 90°, wo sie unendlich wird, oder eigentlicher zu reden, es giebt für 90° keine Tangente. Dies pflegt man so auszudrücken: Tang. 90° $= \infty$, welches Zeichen das Unendliche bedeutet. Jede Größe, die durch das Unendliche oder durch Null geht, wird negativ. Also die Tangente eines Bogens über 90° wird negativ. Dies erhellet auch daraus, weil $\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$

(§. 7. Trig.). Ist demnach x ⩾ 90, so ist Cos. x negativ, folglich $\frac{\text{Sin. x}}{-\text{Cos. x}} = -\text{Tang. x.}$ Aus dem Zeichen der Sinus und Cosinus in dem dritten und vierten Quadranten läßt sich nach dieser Formel die Beschaffenheit der Tangente in gedachten beyden Quadranten herleiten; nämlich für x ⩾ 180° ist Cos. x negativ und Sin. x auch, folglich $\frac{-\text{Sin. x}}{-\text{Cos. x}}$ $= +\text{Tang. x}$ und für x ⩾ 270° ist Cos. x positiv und Sin. x negativ, mithin $\frac{-\text{Sin. x}}{+\text{Cos. x}}$ $= -\text{Tang. x.}$

Also: Die Tangenten sind positiv im ersten und dritten Quadranten und negativ im zweyten und vierten.

$\text{Tang. } 45° = \text{Cot. } 45° = r = 1.$

$\text{Sec. } 45° = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}.$

Auch folgt aus $\frac{\text{Sin. x}}{\text{Cos. x}} = \text{Tang. x}$, daß, wenn $x = 90°$, mithin Cos. $x = 0$ ist, $\frac{\text{Sin. x}}{0}$ $= \text{Tang. x} = \infty$ ist. Nämlich eine endliche Größe durch 0 dividirt giebt einen unendlichen Quotienten. Der Quotient zeigt nämlich an, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist und 0 muß unfehlbar unendliche Male in einer endlichen Größe enthalten seyn. Das sagt hier weiter nichts, als wenn der Winkel x sich dem rechten so nahe

als

als man will nähert, so wird der Cosinus so klein und die Tangente so groß als man will. Ist aber $x = 90°$, so haben Cosinus und Tangente aufgehört.

§. 71.

Weil (Fig. 53.) $EC : CD = CA : CG$ oder $Cos. x : 1 = 1 : Sec. x$, also $Sec. x = \frac{1}{Cos\ x}$ ist, so richtet sich das Zeichen der Secante in den 4 Quadranten des Kreises nach dem jedesmaligen Zeichen des Cosinus. Auch ist $Sec. x = \sqrt{(1 + Tang.\ x^2)}$, woraus aber für das Zeichen der Secante nichts folgt, weil $Tang.\ x^2$ allemal positiv ist. Die Secanten haben also einerley Zeichen mit den Cosinus.

Ein für allemal will ich hier bemerken, daß Ausdrücke wie $Tang.\ x^2$, $Sin.\ x^2$ u. s. w. nicht das Quadrat von x, als wovon sich kein Quadrat denken läßt, weil es einen Bogen oder Winkel bedeutet, sondern das Quadrat der Tangente, des Sinus u. s. w. von x anzeigt.

§. 72.

Es ist $DE : DC = CH : CS$ oder $Sin. x : 1 = 1 : Cosec. x$, also $Cosec. x = \frac{1}{Sin. x}$. Je

nach:

nachdem also das Zeichen von Sin. x beschaffen ist, ist es auch das Zeichen der Cosecante oder die Cosecanten haben in den verschiedenen Quadranten einerley Zeichen mit den Sinus.

Auch ist GA : AC = CH : HS oder Tang. x : 1 = 1 : Cot. x, also Cot. x = $\frac{1}{\text{Tang. x}}$. Das Zeichen der Cotangente richtet sich also nach dem Zeichen der Tangente oder die Cotangenten haben mit den Tangenten immer einerley Zeichen.

§. 73.

Macht man Fig. 53. AH = R und AD = MB = a, so ist

$$
\begin{aligned}
+ \text{Sin. a} &= + \text{Cos. } (R-a) \\
&= + \text{Sin. } (2R-a) \\
&= - \text{Cos. } (R+a) \\
&= - \text{Sin. } (2R+a) \\
&= - \text{Cos. } (3R-a) \\
&= - \text{Sin. } (4R-a) \\
&= + \text{Cos. } (3R+a)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
+ \text{Tang. a} &= + \text{Cot. } (R-a) \\
&= - \text{Tang. } (2R-a) \\
&= - \text{Cot. } (R+a) \\
&= + \text{Tang. } (2R+a) \\
&= + \text{Cot. } (3R-a) \\
&= - \text{Tang. } (4R-a) \\
&= - \text{Cot. } (3R+a).
\end{aligned}
$$

§. 74.

§. 74.

In allen hier folgenden Formeln ist der Halbmesser des Kreises = 1 angenommen; sollen sie aber für den Halbmesser = r gelten, so muß man r auf die Weise mit in die Formeln bringen, daß auf beyden Seiten gleich viel Dimensionen sind oder gleich viele Linien mit einander multiplicirt werden. Z. B. in der Formel

$$\text{Cos.}(x+y) = \text{Cos.}\,x \,.\, \text{Cos.}\,y - \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$$

ist das, was linker Hand steht, von der ersten, was rechter Hand steht, aber von der zweyten Dimension, weil hier eine Linie mit einer andern multiplicirt wird, welches dorten nicht der Fall ist. Man muß also, um auf beyden Seiten gleiche Dimensionen zu erhalten, linker Hand mit r multipliciren, oder was auf eins hinausläuft, rechter Hand mit r dividiren. Also

$$r \,.\, \text{Cos.}(x+y) = \text{Cos.}\,x \,.\, \text{Cos.}\,y - \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$$

oder

$$\text{Cos.}(x+y) = \frac{\text{Cos}\,x \,.\, \text{Cos.}\,y - \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}{r}.$$

Sucht man die Formel Cos. (x + y) für den Halbmesser r, so wird man sie wie hier finden. Auf die Weise sind die Formeln Sin. (x + y) und Sin. (x − y) in der ebenen Trigonometrie §. 10. und 11. gefunden.

Eben

Eben so ist Cos. A = 1 − 2 Sin. $\frac{1}{2}$ A² für den Halbmesser = 1, aber für den Halbmesser = r, ist Cos. A = $\frac{r^2 - 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A^2}{r}$ oder r . Cos. A = $r^2 - 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A^2$. Sucht man Cos. A gleich Anfangs für den Halbmesser r oder bringt diesen gleich Anfangs mit in die Rechnung, so findet man die Formel eben so wie hier.

I. Formeln für die trigonometrischen Linien.

§. 75.

1. $\text{Sin. } x = \sqrt{(1 - \text{Cos. } x^2)}$
2. $\text{Cos. } x = \sqrt{(1 - \text{Sin. } x^2)}$
3. $\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$
4. $\text{Cot. } x = \frac{1}{\text{Tang. } x} = \frac{\text{Cos. } x}{\text{Sin. } x}$
5. $\text{Sec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } x} = \sqrt{(1 + \text{Tang. } x^2)}$
6. $\text{Cosec. } x = \frac{1}{\text{Sin. } x} = \sqrt{(1 + \text{Cot. } x^2)}$
7. $\text{Sin. verf. } x = 1 - \text{Cos. } x$
8. $\text{Cos. verf. } x = 1 - \text{Sin. } x$
9. $\text{Tang. } x = \text{Sec. } x \text{ . Sin. } x$
10. $\text{Sin. } x = \frac{\text{Tang. } x}{\text{Sec. } x} = \frac{\text{Tang. } x}{\sqrt{(1 + \text{Tang. } x^2)}}$
11. $\text{Cos. } x = \frac{1}{\text{Sec. } x} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{Tang. } x^2)}}$
12. $\text{Sin. } 30° = \text{Cos. } 60° = \frac{1}{2}$
13. $\text{Cos. } 30° = \text{Sin } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

14. $\text{Sin.}\,45^\circ = \text{Cof.}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

15. $\text{Tang.}\,45^\circ = \text{Cot.}\,45^\circ = 1$

16. $\text{Sec.}\,45^\circ = \sqrt{2}$

17. $\text{Sin.}\,(x \mp y) = \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y \pm \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$

18. $\text{Sin.}\,(x - y) = \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y - \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$

19. $\text{Cof.}\,(x + y) = \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y - \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$

20. $\text{Cof.}\,(x - y) = \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y + \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$

21. $\text{Tang.}\,(x + y) = \frac{\text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,y}{1 - \text{Tang.}\,x \,.\, \text{Tang}\,y} = \frac{\text{Cot.}\,y + \text{Cot.}\,x}{\text{Cot.}\,y \,.\, \text{Cot.}\,x - 1}$

22. $\text{Tang.}\,(x - y) = \frac{\text{Tang.}\,x - \text{Tang.}\,y}{1 + \text{Tang.}\,x \,.\, \text{Tang.}\,y} = \frac{\text{Cot.}\,y - \text{Cot.}\,x}{\text{Cot.}\,y \,.\, \text{Cot.}\,x + 1}$

23. $\text{Sin.}\,(x + y) + \text{Sin.}\,(x - y) = 2\,\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y$

24. $\text{Sin.}\,(x + y) - \text{Sin.}\,(x - y) = 2\,\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$

25. $\text{Cof.}\,(x + y) + \text{Cof.}\,(x - y) = 2\,\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y$

26. $\text{Cof.}\,(x - y) - \text{Cof.}\,(x + y) = 2\,\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y$

27. $\text{Sin.}\,x + \text{Sin.}\,y = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(x + y) \,.\, \text{Cof.}\,\frac{1}{2}(x - y)$

28. $\text{Sin. } x - \text{Sin. } y = 2\,\text{Cof. } \frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(x-y)$

29. $\text{Cof. } x + \text{Cof. } y = 2\,\text{Cof. } \frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{Cof. } \frac{1}{2}(x-y)$

30. $\text{Cof. } y - \text{Cof. } x = 2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(x-y)$

31. $\text{Tang. } x \pm \text{Tang. } y = \frac{\text{Sin. } (x \pm y)}{\text{Cof. } x \cdot \text{Cof. } y}$

32. $\text{Cot. } y \pm \text{Cot. } x. = \frac{\text{Sin. } (x \pm y)}{\text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y}$

33. $\frac{\text{Sin. } x + \text{Sin. } y}{\text{Cof. } x + \text{Cof. } y} = \text{Tang. } \frac{1}{2}(x+y) = \frac{\text{Cof. } y - \text{Cof. } x}{\text{Sin } x - \text{Sin. } y}$

34. $\frac{\text{Sin. } x - \text{Sin. } y}{\text{Cof } x + \text{Cof. } y} = \text{Tang. } \frac{1}{2}(x-y)$

35. $\text{Sin. } x = 2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}x \cdot \text{Cof. } \frac{1}{2}x$

36. $\text{Cof. } x = 1 - 2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}x^2 = 2\,\text{Cof. } \frac{1}{2}x^2 - 1$

37. $\text{Tang. } x = \frac{2\,\text{Tang. } \frac{1}{2}x}{1 - \text{Tang. } \frac{1}{2}x^2} = \frac{2\,\text{Cot. } \frac{1}{2}x}{\text{Cot. } \frac{1}{2}x^2 - 1}$

38. $\text{Tang. } \frac{1}{2}x = \frac{1 - \text{Cof. } x}{\text{Sin. } x} = \frac{\text{Sin. } x}{1 + \text{Cof. } x}$

39. $\text{Tang. } \frac{1}{2}x^2 = \frac{1 - \text{Cof. } x}{1 + \text{Cof. } x}$

40. $\text{Sin. verf. } x = 1 - \text{Cof. } x = 2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}x^2$

41. $\text{Cof. verf. } x = 1 - \text{Sin. } x = 2\,\text{Cof. } \frac{1}{2}(R+x)^2 = 2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}(R-x)^2$

42. $\text{Sin. } x^2 - \text{Sin. } y^2 = \text{Cof. } y^2 - \text{Cof } x^2 = \text{Sin. } (x-y) \cdot \text{Sin. } (x+y)$

43. $\text{Cof. } x^2 - \text{Sin. } y^2 = \text{Cof. } y^2 - \text{Sin. } x^2 = \text{Cof. } (x-y) \cdot \text{Cof. } (x+y)$

44. $\text{Tang.}\, x^2 - \text{Tang.}\, y^2 = \frac{\text{Sin.}\,(x-y)\,.\,\text{Sin.}\,(x+y}{\text{Cof.}\, x^2\,.\,\text{Cof.}\, y^2}$

45. $\text{Cot.}\, y^2 - \text{Cot.}\, x^2 = \frac{\text{Sin.}\,(x-y)\,.\,\text{Sin.}\,(x+y)}{\text{Sin.}\, x^2\,.\,\text{Sin.}\, y^2}$

46. $\text{Sec.}\, x - 1 = \text{Tang.}\, \frac{1}{2}x\,.\,\text{Tang.}\, x.$

§. 76.

Die Beweise der Formeln von 1 bis 13 folgen leicht aus der Betrachtung der Figur.

1. Es ist nämlich DE (Fig. 53.) $= \sqrt{(DC^2 - CE^2)}$; nennt man nun den Winkel ACD oder den Bogen AD $= x$ und setzt DC $= 1$, so ist

$$DE = \text{Sin.}\, x = \sqrt{(1 - \text{Cof.}\, x^2)}.$$

2. Eben so ist $EC = \sqrt{(DC^2 - DE^2)}$ oder $EC = \text{Cof.}\, x = \sqrt{(1 - \text{Sin.}\, x^2)}$.

3. Es ist CE : ED $=$ CA : AG, weil ED und AG auf AC senkrecht stehen und mithin parallel sind. Gebraucht man nun die trigonometrischen Bezeichnungen, so hat man

$$\text{Cof.}\, x : \text{Sin.}\, x = 1 : \text{Tang.}\, x, \text{ also}$$

$$\text{Tang.}\, x = \frac{\text{Sin.}\, x}{\text{Cof.}\, x}$$

Für $x = 90°$ ist $\text{Cof.}\, x = 0$, folglich

$$\text{Tang.}\, 90° = \frac{\text{Sin.}\, 90°}{\text{Cof.}\, 90°} = \frac{1}{0} = \infty.$$

4. $CK : KD = CH : HS$, weil DK und SH parallel sind; also, weil $CK = DE = \text{Sin. } x$ und $DK = CE = \text{Cof. } x$ ist,

$$\text{Sin. } x : \text{Cof. } x = 1 : \text{Cot. } x, \text{ mithin}$$

$$\text{Cot. } x = \frac{\text{Cof. } x}{\text{Sin. } x}.$$

Es sind aber auch die beyden rechtwinklichten Dreyecke CAG und CHS ähnlich, weil AG parallel mit CH und deshalb $CGA = HCG$ ist, folglich

$$GA : AC = CH : HS, \text{ d. h.}$$

$$\text{Tang. } x : 1 = 1 : \text{Cot. } x, \text{ also}$$

$$\text{Cot. } x = \frac{1}{\text{Tang. } x}, \text{ aber}$$

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cof. } x}, \text{ folglich}$$

$$\text{Cot. } x = 1 : \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cof. } x}$$

$$= 1 \cdot \frac{\text{Cof. } x}{\text{Sin. } x}$$

$$= \frac{\text{Cof. } x}{\text{Sin. } x}, \text{ wie vorhin.}$$

5. Die beyden Dreyecke CED und CAG sind ähnlich, folglich

$$CE : CA = CD : CG, \text{ oder}$$

$$\text{Cof. } x : 1 = 1 : \text{Sec. } x, \text{ und folglich}$$

$$\text{Sec. } x = \frac{1}{\text{Cof. } x}.$$

Aber auch $CG = \sqrt{(CA^2 + AG^2)}$, also

$$\text{Sec. } x = \sqrt{(1 + \text{Tang. } x^2)}.$$

6. Eben so $CK : CD = CH : CS$; aber $CK = ED = \text{Sin. } x$, folglich

$$\text{Sin. } x : 1 = 1 : \text{Cosec. } x, \text{ also}$$

$$\text{Cosec. } x = \frac{1}{\text{Sin. } x}.$$

Es ist aber auch $CS = \sqrt{(CH^2 + HS^2)} = \sqrt{(1 + \text{Cot. } x^2)} = \text{Cosec. } x.$

7. $AE = AC - EC$ oder Sin. vers. $x = 1 - \text{Cos. } x.$

8. $HK = CH - CK$ oder Cos. vers. $x. = 1 - \text{Sin. } x.$

§. 77.

9. Es verhält sich in den beyden ähnlichen Dreyecken CDE und CGA

$$CG : CD = GA : DE, \text{ oder}$$

$$\text{Sec. } x : 1 = \text{Tang. } x : \text{Sin. } x, \text{ oder}$$

$$1 : \text{Sec. } x = \text{Sin. } x : \text{Tang. } x, \text{ also}$$

$$\text{Tang. } x = \text{Sin. } x \,.\, \text{Sec. } x.$$

Dies folgt auch schon aus der Formel 5, wo $\text{Sec. } x. = \frac{1}{\text{Cos. } x}$ ist.

10. Aus der Proportion $CG : CD = GA : DE$, oder

$$\text{Sec. } x : 1 = \text{Tang. } x : \text{Sin. } x, \text{ folglich}$$

$$\text{Sin. } x = \frac{\text{Tang. } x}{\text{Sec. } x}.$$

Dies

Dies folgt auch aus den Formeln 3 und 5, nämlich: $\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$ und

$$\text{Sec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } x}; \text{ folglich}$$

$$\frac{\text{Tang. } x}{\text{Sec. } x} = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x} : \frac{1}{\text{Cos. } x}$$

$$= \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x} \cdot \text{Cos. } x.$$

$$= \text{Sin. } x, \text{ wie oben.}$$

Weil $\text{Sec. } x = \sqrt{(1 + \text{Tang. } x^2)}$, so ist auch $\text{Sin. } x = \frac{\text{Tang. } x}{\sqrt{(1 + \text{Tang. } x^2)}}$.

11. $\text{CG} : \text{CD} = \text{CA} : \text{CE}$, oder

$\text{Sec. } x : 1 = 1 : \text{Cos. } x$, also

$$\text{Cos. } x. = \frac{1}{\text{Sec. } x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{Tang. } x^2)}}$$

Nach der Formel 5 ist

$$\text{Sec. } x = \frac{1}{\text{Cos. } x}, \text{ folglich}$$

$$\text{Cos. } x = 1 : \frac{1}{\text{Cos. } x}$$

$$= 1 \cdot \text{Cos. } x$$

$$= \text{Cos. } x.$$

Die Formel 5 giebt also das Nämliche.

Die Formeln 12. 13. 14. 15. 16. sind oben §. 68. — 70. vorgekommen.

§. 78.

Beweis der Formel 17 : Sin. $(x + y)$ $=$ Sin. x . Cos. y $+$ Cos. x . Sin. y, wobey angenommen wird, daß sowohl jeder einzelne Bogen oder Winkel als auch deren Summe unter 90° oder $x + y < 90°$ sey. Fig. 54.

Man nenne ACB oder AB $=$ x, BCD oder BD $=$ y, so ist BE $=$ Sin. x, EC $=$ Cos. x, DG $=$ Sin. x, GC $=$ Cos. y und DF $=$ Sin. $(x + y)$, welches gesucht wird.

Die beyden Dreyecke CBE und CGI sind ähnlich, weil GI und BE senkrecht, mithin parallel sind; folglich CB : BE $=$ CG : GI oder wenn man trigonometrische Bezeichnungen gebraucht, r : Sin. x $=$ Cos. y : GI; mithin GI $= \frac{\text{Sin. x . Cos. y}}{\text{r}} =$ HF. Ferner sind die beyden Dreyecke DGH und DGK ähnlich; aber auch $\triangle$ DGK $\sim$ $\triangle$ CFK und $\triangle$ CFK $\sim$ $\triangle$ CBE, folglich $\triangle$ DGH $\sim$ $\triangle$ CEB, und daher CB : CE $=$ DG : DH, oder wenn man, wie vorhin, trigonometrische Bezeichnungen gebraucht, r : Cos. x $=$ Sin. y : DH, also DH $= \frac{\text{Sin. y . Cos. x}}{\text{r}}$. Hierzu addire man den vorhin gefundenen Werth von HF, so hat man

HF

$$HF + HD = DF = \text{Sin.}(x+y)$$
$$= \frac{\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y}{r} + \frac{\text{Sin.}\,y \,.\, \text{Cof.}\,x}{r}$$
$$= \frac{\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y + \text{Sin.}\,y \,.\, \text{Cof.}\,x}{r}$$
$$= \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y + \text{Sin.}\,y \,.\, \text{Cof.},x,$$

wenn man $r = 1$ ſetzt.

§. 79.

Beweis der Formel 18: $\text{Sin.}(x-y) = \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y - \text{Sin.}\,y \,.\, \text{Cof.}\,x.$

Es ſey (Fig. 55.) $AD = x$, $AB = y$ und $DG = \text{Sin.}\,x$, $CG = \text{Cof.}\,x$, $AF = \text{Sin.}\,y$, $CF = \text{Cof.}\,y$ gegeben; man ſoll $DL = \text{Sin.}(x-y)$ finden.

Man ziehe GH ſenkrecht auf CB und GK parallel mit CB auf die verlängerte DL, ſo iſt HK ein Rechteck, worin $HG = LK$ iſt. Nun iſt $\triangle ACF \sim \triangle GCI$, weil $AFC = CGI = R$ und ACF gemeinſchaftlich; ferner $\triangle GCI \sim \triangle ILD$, wegen der Wechſelwinkel bey I und $\triangle ILD \sim \triangle GKD$, alſo $\triangle ACF \sim \triangle GDK$; folglich $AC : CF = DG : DK$ oder $r : \text{Cof.}\,y = \text{Sin.}\,x : DK$ und $DK = \frac{\text{Cof.}\,y \,.\, \text{Sin.}\,x}{r}$. Ferner $\triangle ACF \sim \triangle GCH$, folglich $AC : AF = CG : GH$ oder $r : \text{Sin.}\,y$

$= \text{Cos. } x : GH$, also $GH = \frac{\text{Sin. } y \cdot \text{Cos. } x}{r}$
$= LK$, mithin $DL = DK - LK = \text{Sin.}(x-y)$
$= \frac{\text{Cos. } y \cdot \text{Sin. } x}{r} - \frac{\text{Sin. } y \cdot \text{Cos. } x}{r}$
$= \frac{\text{Cos. } y \cdot \text{Sin. } x - \text{Sin. } y \cdot \text{Cos. } x}{r}$
$= \text{Cos. } y \cdot \text{Sin. } x - \text{Sin. } y \cdot \text{Cos. } x$, wenn r $= 1$ gesetzt wird.

§. 80.

Beweis der Formel 19: $\text{Cos.}(x+y) = \text{Cos. } x \cdot \text{Cos. } y - \text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y$. Die Buchstaben haben hier die nämliche Bedeutung wie in §. 78; $FC = \text{Cos.}(x+y)$ wird gesucht. Fig. 54.

$\triangle CBE \sim \triangle CGI$ und mithin $CB : CE = CG : CI$ oder $r : \text{Cos. } x = \text{Cos. } y : CI$ und $CI = \frac{\text{Cos. } x \cdot \text{Cos. } y}{r}$. Ferner $\triangle CBE \sim \triangle DGH$ und $CB : BE = DG : GH$ oder $r : \text{Sin. } x = \text{Sin. } y : GH$, also $GH = \frac{\text{Sin } x \cdot \text{Sin. } y}{r} = IF$. Nun ist $CF = CI - IF$
$= \frac{\text{Cos. } x \cdot \text{Cos. } y}{r} - \frac{\text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y}{r} = \text{Cos.}(x+y)$
$= \frac{\text{Cos } x \cdot \text{Cos. } y - \text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y}{r}$
$= \text{Cos. } x \cdot \text{Cos. } y - \text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y$, wenn man $r = 1$ setzt.

§. 81.

§. 81.

Beweis der Formel 20: Cof. (x−y) = Cof. x . Cof. y + Sin. x . Sin. y. Fig. 56.

Man kann diesen Beweis folgendergestalt führen:

$$DC^2 = 1 = DF^2 + FC^2 = \text{Sin. } x^2 + \text{Cof. } x^2$$

und $GC^2 = \text{Cof. } (x-y)^2 = DC^2 - DG^2 = DF^2 + FC^2 - DG^2 = \text{Sin. } x^2 + \text{Cof. } x^2 - \text{Sin. } (x-y)^2,$

aber

$$\text{Sin. } (x-y) = \text{Sin. } x \text{ . Cof. } y - \text{Sin. } y \text{ . Cof. } x$$

und

$$\text{Sin. } (x-y)^2 = \text{Sin. } x^2 \text{ . Cof. } y^2 - 2 \text{ Sin. } x \text{ . Cof. } y \text{ . Sin. } y \text{ . Cof. } x + \text{Sin. } y^2 \text{ . Cof. } x^2,$$

also

$$\text{Cof. } (x-y)^2 = \text{Sin. } x^2 + \text{Cof. } x^2 - \text{Sin. } x^2 \text{ . Cof. } y^2 + 2 \text{ Sin. } x \text{ . Cof. } y \text{ . Sin. } y \text{ . Cof. } x - \text{Sin. } y^2 \text{ . Cof. } x^2$$

$$= 1 - \text{Cof. } y^2 \text{ . Sin. } x^2 + 2 \text{ Sin. } x \text{ . Cof. } y \text{ . Sin. } y \text{ . Cof. } x - (1 - \text{Cof. } y^2) \text{ . Cof. } x^2.$$

Aber $1 - \text{Cof. } y^2 = \text{Sin. } y^2$ und $1 - \text{Sin. } y^2 = \text{Cof. } y^2$, also

$$\text{Cof. } (x-y)^2 = \text{Sin. } y^2 \text{ . Sin. } x^2 + 2 \text{ Sin. } x \text{ . Cof. } y \text{ . Sin. } y \text{ . Cof. } x + \text{Cof. } y^2 \text{ . Cof. } x^2$$

$$= (\text{Sin. } y \text{ . Sin. } x + \text{Cof. } y \text{ . Cof. } x)^2, \text{ also}$$

$$\text{Cof. } (x-y) = \text{Sin. } y \text{ . Sin. } x + \text{Cof. } y \text{ . Cof. } x.$$

§. 82.

Beweis für 21.

$$\text{Tang.}(x+y) = \frac{\text{Sin.}(x+y)}{\text{Cof.}(x+y)}$$

$$= \frac{\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y + \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y - \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}$$ und wenn man Zähler und Nenner durch Cof. x . Cof. y dividirt, so hat man ersteren

$$= \frac{\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y + \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y} = \frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Cof.}\,x} + \frac{\text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,y}$$

$= \text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,y$; der Nenner wird

$$= \frac{\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y - \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y} = 1 - \frac{\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y}$$

$= 1 - \text{Tang.}\,x \,.\, \text{Tang.}\,y$, also $\text{Tang.}(x+y)$

$$= \frac{\text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,y}{1 - \text{Tang.}\,x \,.\, \text{Tang.}\,y} = \frac{\text{Cot.}\,y + \text{Cot.}\,x}{\text{Cot.}\,y \,.\, \text{Cot.}\,y - 1},$$

wenn man $\text{Tang.}\,x = \frac{1}{\text{Cot.}\,x}$ setzt.

§. 83.

Beweis für 22.

$$\text{Tang.}(x-y) = \frac{\text{Sin.}(x-y)}{\text{Cof.}(x-y)}$$

$$= \frac{\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y - \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y + \text{Sin.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}.$$ Man dividire Zähler und Nenner durch Cof. x . Cof. y, so wird aus jenem

$$\frac{\text{Sin.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y - \text{Cof.}\,x \,.\, \text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,x \,.\, \text{Cof.}\,y} = \frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Cof.}\,x} - \frac{\text{Sin.}\,y}{\text{Cof.}\,y}$$

$= \text{Tang.}\,x - \text{Tang.}\,y.$ Aus dem Nenner wird

Cof. x

$$\frac{\text{Cof.x . Cof.y + Sin.x . Sin.y}}{\text{Cof.x . Cof.y}} = 1 + \frac{\text{Sin.x . Sin.y}}{\text{Cof.x . Cof.y}}$$

$= 1 + \text{Tang.x . Tang.y.}$ Also $\text{Tang.}(x-y)$

$$= \frac{\text{Tang.x} - \text{Tang.y}}{1 + \text{Tang.x . Tang.y}} = \frac{\text{Cot.y} - \text{Cot.x}}{\text{Cot.y . Cot.x} + 1},$$

wenn man $\text{Tang.x} = \frac{1}{\text{Cot.x}}$ setzt.

§. 84.

Beyspiel. Man soll $\text{Tang.x}\,(45° + 30°)$ und $\text{Tang.}\,(45° - 30°)$ finden.

$\text{Tang.}\,45° = 1$, $\text{Tang.}\,30 = \frac{\text{Sin.}\,30°}{\text{Cof.}\,30°} = \frac{1}{2}$:

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Folglich

$\text{Tang.}\,(45° + 30°) = \text{Tang.}\,75°$

$$= \frac{\text{Tang.x} + \text{Tang.y}}{1 - \text{Tang.x . Tang.y}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3} : \frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{3-\sqrt{3}} =$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3}) \cdot (3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3}) \cdot (3+\sqrt{3})} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3}$$

$$= \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3} = 3{,}7320508$$

(für $r = 1$), welche Größe man mit 10,000000 zu multipliciren hat, um den Halbmesser der Tafeln zu bekommen.

$$\text{Tang.}(45° - 30°) = \text{Tang. } 15°$$

$$= \frac{\text{Tang. x} - \text{Tang. y}}{1 + \text{Tang. x} \cdot \text{Tang. y}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{6} =$$

$$\frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}2679491.$$

§. 85.

Die Beweise für 23 — 26 inclus. folgen aus 17 und 20.

§. 86.

Die Beweise für 27 bis 30 inclus. folgen aus 23 — 26. Denn setzt man $x + y = a$ und $x - y = b$, so ist, wenn man addirt, $a + b = x + y + x - y = 2x$ und $\frac{a+b}{2} = x$ und $\frac{a-b}{2} = y$. Es wird also aus 23

$$\text{Sin. a} + \text{Sin. b} = 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a + b) \cdot \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(a - b),$$

wo man auch x für a und y für b setzen kann.

§. 87.

Beweis für 31 und 32.

$$\text{Tang. x} + \text{Tang. y} = \frac{\text{Sin. x}}{\text{Cos. x}} + \frac{\text{Sin. y}}{\text{Cos. y}}$$

und (wenn beyde Brüche auf gleiche Benennung gebracht werden)

=

$$= \frac{\text{Sin. } x \cdot \text{Cos. } y + \text{Sin. } y \cdot \text{Cos. } x}{\text{Cos. } x \cdot \text{Cos. } y}$$

$$= \frac{\text{Sin. } (x+y)}{\text{Cos } x \cdot \text{Cos. } y}.$$

Eben so $\text{Tang. } x - \text{Tang. } y = \frac{\text{Sin. } (x-y)}{\text{Cos. } x \cdot \text{Cos. } y}$.

Ferner $\text{Cot. } x + \text{Cot. } y = \frac{\text{Cos. } x}{\text{Sin. } x} + \frac{\text{Cos. } y}{\text{Sin. } y}$

$$= \frac{\text{Sin. } y \cdot \text{Cos. } x + \text{Sin. } x \cdot \text{Cos. } y}{\text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y}$$

$$= \frac{\text{Sin. } (x+y)}{\text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y}.$$

Eben so $\text{Cot. } x - \text{Cot. } y = \frac{\text{Sin. } (x-y)}{\text{Sin. } x \cdot \text{Sin. } y}$.

§. 88.

Beweis für 33.

Aus 27 und 29 folgt

$$\frac{\text{Sin. } x + \text{Sin. } y}{\text{Cos. } x + \text{Cos. } y} = \frac{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}(x-y)}{2 \text{ Cos. } \frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}(x-y)}$$

$$= \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(x+y)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(x+y)}$$

$$= \text{Tang. } \frac{1}{2}(x+y).$$

Und aus 30 und 28 das Uebrige.

§. 89.

Beweis für 34.

Aus 28 und 29 folgt

$$\frac{\text{Sin. } x - \text{Sin. } y}{\text{Cos. } x + \text{Cos. } y} = \frac{2 \text{ Cos. } \frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(x-y)}{2 \text{ Cos. } \frac{1}{2}(x+y) \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}(x-y)}$$

$$= \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(x-y)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}(x-y)}$$

$$= \text{Tang. } \frac{1}{2}(x-y).$$

§. 90.

§. 90.

Beweise für 35 bis 37 inclus.

Man setze in die Formeln 17, 19, 21 $y = x$, so hat man

$$\begin{aligned}
\text{Sin. } 2x &= 2\,\text{Sin. } x \,.\, \text{Cos. } x \\
\text{Cos. } 2x &= \text{Cos. } x^2 - \text{Sin. } x^2 \\
&= 1 - \text{Sin. } x^2 - \text{Sin. } x^2 \\
&= 1 - 2\,\text{Sin. } x^2 \\
&= 1 - 2\,(1 - \text{Cos. } x^2) \\
&= 1 - 2 + 2\,\text{Cos. } x^2 \\
&= 2\,\text{Cos. } x^2 - 1
\end{aligned}$$

$$\text{Tang. } 2x = \frac{2\,\text{Tang. } x}{1 - \text{Tang. } x^2}.$$

Man setze nun $\frac{1}{\text{Cot. } x}$ für Tang. x, so hat man

$$\begin{aligned}
\text{Tang. } 2x &= \frac{2}{\text{Cot. } x} : \left(1 - \frac{1}{\text{Cot. } x^2}\right) \\
&= \frac{2}{\text{Cot. } x} : \frac{\text{Cot. } x^2 - 1}{\text{Cot. } x^2} \\
&= \frac{2}{\text{Cot } x} \cdot \frac{\text{Cot. } x^2}{\text{Cot. } x^2 - 1} \\
&= \frac{2\,\text{Cot. } x}{\text{Cot. } x^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Setzt man in diese Formeln für $2x - x$ und für $x - \frac{1}{2}x$, so hat man die Ausdrücke 35, 36, 37.

§. 91.

Beweis der Formel 38.

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x = \frac{1 - \text{Cos. } x}{\text{Sin. } x} = \frac{\text{Sin. } x}{1 + \text{Cos. } x}.$$

Aus

Aus 35 folgt

$$\text{Sin. } x = 2\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}x \,.\, \text{Cos. } \tfrac{1}{2}x$$

und aus 36

$$1 + \text{Cos. } x = 2\,\text{Cos. } \tfrac{1}{2}x \,.\, \text{Cos. } \tfrac{1}{2}x, \text{ folglich}$$

$$\frac{\text{Sin. } x}{1 + \text{Cos. } x} = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}x}{\text{Cos. } \frac{1}{2}x}$$

$$= \text{Tang. } \tfrac{1}{2}x.$$

Eben so folgt aus 36

$$1 - \text{Cos. } x = 2\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}x \,.\, \text{Sin. } \tfrac{1}{2}x \text{ und}$$

$$\text{Sin. } x = 2\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}x \,.\, \text{Cos. } \tfrac{1}{2}x, \text{ also}$$

$$\frac{1 - \text{Cos. } x}{\text{Sin. } x} = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}x}{\text{Cos. } \frac{1}{2}x}$$

$$= \text{Tang. } \tfrac{1}{2}x.$$

Diese Werthe für $\text{Tang. } \frac{1}{2}x$ kann man noch auf eine andere Weise herleiten; nämlich aus 33 und 34 ist

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(x+y) = \frac{\text{Cos. } y - \text{Cos. } x}{\text{Sin. } x - \text{Sin. } y} \text{ und}$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{\text{Sin. } x - \text{Sin. } y}{\text{Cos. } x + \text{Cos. } y}.$$

Man setze hier $y = 0$, so ist $\text{Cos. } y = 1$ und $\text{Sin. } y = 0$, folglich

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x = \frac{1 - \text{Cos. } x}{\text{Sin. } x} \text{ und aus der zweyten Formel}$$

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x + 1}$$

$$= \frac{\text{Sin. } x}{1 + \text{Cos. } x}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 92.

§. 92.

Beweis für 39.

Aus 38 folgt, wenn man beyde Werthe für Tang. $\frac{1}{2}x$ multiplicirt,

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}x^2 = \frac{\text{Sin. x} - \text{Sin. x . Cof. x}}{\text{Sin. x} + \text{Sin. x . Cof. x}}$$

$$= \frac{(1 - \text{Cof. x})\ \text{Sin. x}}{(1 + \text{Cof. x})\ \text{Sin. x}}$$

$$= \frac{1 - \text{Cof. x}}{1 + \text{Cof. x}}.$$

§. 93.

Beweis für 40.

Sin. verf. x = 1 − Cof. x, aber Cof. x

= 1 − 2 Sin. $\frac{1}{2}x^2$ (36), folglich

Sin. verf. x = 1 − 1 + 2 Sin. $\frac{1}{2}x^2$

= 2 Sin. $\frac{1}{2}x^2$.

§. 94.

Beweis für 41.

Aus 19 ist Cof. (x + y)

= Cof. x . Cof. y − Sin. x . Sin. y.

Man setze y = $\frac{1}{2}$R, so hat man Cof. ($\frac{1}{2}$R + x)

= Cof. $\frac{1}{2}$R . Cof. x − Sin. $\frac{1}{2}$R . Sin. x,

aber Cof. $\frac{1}{2}$R = Cof. 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, folglich

Cof. ($\frac{1}{2}$R + x) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cof. x − $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sin. x

=

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\text{Cof. } x - \text{Sin. } x)$$

$$= \frac{\text{Cof. } x - \text{Sin. } x}{\sqrt{2}}$$ (wenn man durch $\sqrt{2}$ dividirt).

Folglich wenn man quadrirt, $2 \text{ Cof. } (\frac{1}{2}R + x)^2$

$= \text{Cof. } x^2 + \text{Sin. } x^2 - 2 \text{ Cof. } x \text{ . Sin. } x$

$= 1 - 2 \text{ Cof. } x \text{ . Sin. } x.$

Aber $\text{Sin. } x = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}x \text{ . Cof. } \frac{1}{2}x$ (35), alſo

$\text{Sin. } 2x = 2 \text{ Sin. } x \text{ . Cof. } x$, alſo

$2 \text{ Cof. } (\frac{1}{2}R + x)^2 = 1 - \text{Sin. } 2x$, oder

$2 \text{ Cof. } (\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}x)^2 = 1 - \text{Sin. } x = \text{Cof. verſ. } x.$

§. 95.

Beweis für 42.

Aus 17 und 18 hat man

$\text{Sin. } (x+y) = \text{Sin. } x \text{ . Cof. } y + \text{Cof. } x \text{ . Sin. } y,$

und

$\text{Sin. } (x-y) = \text{Sin. } x \text{ . Cof. } y - \text{Cof. } x \text{ . Sin. } y.$

Dieſe mit einander multiplicirt, giebt

$\text{Sin. } (x+y) \text{ . Sin. } (x-y)$

$= \text{Sin. } x^2 \text{ . Cof. } y^2 - \text{Cof. } x^2 \text{ . Sin. } y^2$

$= \text{Sin. } x^2 (1 - \text{Sin. } y^2) - \text{Cof. } x^2 \text{ . Sin. } y^2$

$= \text{Sin. } x^2 - \text{Sin. } x^2 \text{ . Sin. } y^2 - \text{Cof. } x^2 \text{ . Sin. } y^2$

$= \text{Sin. } x^2 - \text{Sin. } y^2 (\text{Sin. } x^2 + \text{Cof. } x^2)$

$= \text{Sin. } x^2 - \text{Sin. } y^2.$

Statt $\text{Sin. } x^2$ und $\text{Sin. } y^2$ ſetze man nun $1 - \text{Cof. } x^2$ und $1 - \text{Cof. } y^2$, ſo hat man

Sin.

$$\text{Sin.}(x+y) \cdot \text{Sin.}(x-y) = \text{Sin.}\,x^2 - \text{Sin.}\,y^2$$
$$= 1 - \text{Cof.}\,x^2 - (1 - \text{Cof.}\,y^2)$$
$$= 1 - \text{Cof.}\,x^2 - 1 + \text{Cof.}\,y^2$$
$$= \text{Cof.}\,y^2 - \text{Cof.}\,x^2,$$

§. 96.

Der Beweis für 43 folgt eben so aus 19 und 20.

Der Beweis für 44 und 45 folgt aus 31 und 32. Nämlich:

$$\text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,y = \frac{\text{Sin.}\,(x+y)}{\text{Cof.}\,x \cdot \text{Cof.}\,y}, \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\,x - \text{Tang.}\,y = \frac{\text{Sin.}\,(x-y)}{\text{Cof.}\,x \cdot \text{Cof.}\,y}, \text{ also}$$

$$\text{Tang.}\,x^2 - \text{Tang.}\,y^2$$
$$= (\text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,y) \cdot (\text{Tang.}\,x - \text{Tang.}\,y)$$
$$= \frac{\text{Sin.}\,(x+y) \cdot \text{Sin.}\,(x-y)}{\text{Cof.}\,x^2 \cdot \text{Cof.}\,y^2}.$$

Eben so ist

$$\text{Cot.}\,x + \text{Cot.}\,y = \frac{\text{Sin.}\,(x+y)}{\text{Sin.}\,x \cdot \text{Sin.}\,y}, \text{ und}$$

$$\text{Cot.}\,x - \text{Cot.}\,y = \frac{\text{Sin.}\,(x-y)}{\text{Sin.}\,x \cdot \text{Sin.}\,y}, \text{ folglich}$$

$$(\text{Cot.}\,x + \text{Cot.}\,y) \cdot (\text{Cot.}\,x - \text{Cot.}\,y)$$
$$= \text{Cot.}\,x^2 - \text{Cot.}\,y^2 = \frac{\text{Sin.}\,(x+y) \cdot \text{Sin.}\,(x-y)}{\text{Sin.}\,x^2 \cdot \text{Sin.}\,y^2}.$$

§. 97.

Beweis für 46.

$$\text{Sec.}\,x = \frac{1}{\text{Cof.}\,x} \text{ und}$$

$$\text{Sec.}\,x - 1 = \frac{1}{\text{Cof.}\,x} - 1 = \frac{1 - \text{Cof.}\,x}{\text{Cof.}\,x} = \frac{2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}x^2}{\text{Cof.}\,x}.$$

Aber

Aber $\frac{\text{Sin. x}}{\text{Cos. x}} = \text{Tang. x}$ und Sin. x

$= \text{Cos. x} \cdot \text{Tang. x}$ und $\frac{\text{Sin. x}}{\text{Tang. x}} = \text{Cos. x}$,

folglich $\text{Sec. x} - 1 = \frac{2\,\text{Tang. x} \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}\text{x}^2}{\text{Sin. x}}$

$= \frac{2\,\text{Tang. x} \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}\text{x}^2}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\text{x} \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}\text{x}}$, weil Sin. x

$= 2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\text{x} \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}\text{x}$ ist (35), also Sec. x − 1

$= \frac{\text{Tang. x} \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}\text{x}}{\text{Cos.}\frac{1}{2}\text{x}} = \text{Tang. x} \cdot \text{Tang.}\frac{1}{2}\text{x}.$

II. Formeln für rechtwinklichte ebene Dreyecke. Fig. 57.

§. 98.

Man bemerke, daß das rechtwinklichte ebene Dreyeck mit ABC bezeichnet und A an den rechten Winkel gesetzt wird; die kleinen Buchstaben a, b, c bezeichnen die Seiten, die den mit denselben großen Buchstaben bezeichneten Winkeln gegenüberliegen. Z. B. a liegt dem Winkel A, b dem Winkel B u. s. w. gegenüber.

Diese Bezeichnungsart gewährt den erheblichen Vortheil, daß man in einer Formel gleich erkennen kann, was gegenüberliegende und was anliegende Seiten sind. Z. B. in dem Ausdruck Cos. B $= \frac{\text{Cos b} - \text{Cos. a} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. a} \cdot \text{Sin. c}}$ ist b die dem gesuchten

Win-

Winkel gegenüberliegende Seite, a und c die anliegenden. Eben so $\text{Cof. C} = \frac{\text{Cof. c} - \text{Cof. a} \cdot \text{Cof. b}}{\text{Sin. a} \cdot \text{Sin. b}}$.

1. $a = \sqrt{(b^2 + c^2)} = b\sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)}$.

2. $b = \sqrt{(a^2 - c^2)} = \sqrt{(a+c) \cdot (a-c)}$.

3. $a = \frac{b}{\text{Sin. B}}$.

4. $b = a \cdot \text{Sin. B} = c \cdot \text{Tang. B}$.

5. $\text{Sin.} = \frac{b}{a}$.

6. $\text{Tang. B} = \frac{b}{c}$.

7. $\text{Sin.} \frac{1}{2} B^2 = \frac{a-c}{2a}$.

8. $\text{Tang.} \frac{1}{2} B^2 = \frac{a-c}{a+c}$.

9. $\text{Tang.} \frac{1}{2} B = \frac{a-c}{b} = \frac{b}{a+c}$.

10. $\text{Tang.} 45° - B = \frac{c-b}{c+b}$.

11. $\text{Sin.} (45° - B) = \frac{c-b}{a \cdot \sqrt{2}}$.

§. 99.

Die Beweise für 1 und 2 folgen aus dem pythagoriſchen Satze.

Die Beweiſe für 3 und 6 beruhen auf den Proportionen a : b = 1 : Sin. B. und c : b = 1 : Tang. B.

Die Beweiſe für 7 und 8 laſſen ſich so herleiten:

a : c

$a : c = 1 : \text{Cof.}B$, und

$a : a - c = 1 : 1 - \text{Cof.}B$, und

$a : a - c = 1 : 2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}B^2$, weil $1 - \text{Cof.}B = 2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}B^2$ (36);

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{a-c}{2a}.$$

Ferner $a + c : a - c = 1 + \text{Cof.}B : 1 - \text{Cof.}B$

$$= 1 : \frac{1 - \text{Cof.}B}{1 + \text{Cof.}B}$$

$= 1 : \text{Tang.}\frac{1}{2}B^2$ (39), also

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{a-c}{a+c}.$$

§. 100.

Beweis für 9. In 8 hat man

$\text{Tang.}\frac{1}{2}B^2 = \frac{a-c}{a+c}$ und, wenn man mit b^2

$= (a-c).(a+c)$ multiplicirt,

$b^2 . \text{Tang.}\frac{1}{2}B^2 = (a-c)^2$, und

$b . \text{Tang.}\frac{1}{2}B = a - c$, also

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B = \frac{a-c}{b}.$$

Oder man dividire $\text{Tang.}\frac{1}{2}B^2 = \frac{a-c}{a+c}$ durch b^2

$= (a-c) . (a+c)$, so hat man

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}B^2}{b^2} = \frac{a-c}{a+c} : a^2 - c^2 = \frac{1}{(a+c)^2}$$

und $$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}B}{b} = \frac{1}{a+c}$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B = \frac{b}{a+c}.$$

§. 101.

§. 101.

Beweis für 10 und 11.

Aus 6 ist $\text{Tang.}B = \frac{b}{c}$, also

$$c : b = 1 : \text{Tang.}B, \text{ folglich}$$

$$1)\ c+b : c-b = 1+\text{Tang.}B : 1-\text{Tang.}B$$

$$= 1 : \frac{1-\text{Tang.}B}{1+\text{Tang.}B}.$$

Nun ist aus 22

$$\text{Tang.}(x-y) = \frac{\text{Tang.}x - \text{Tang.}y}{1+\text{Tang.}x \,.\, \text{Tang.}y}.$$

Setzt man $x = 45°$ und $y = B$, so hat man

$$\text{Tang.}(45°-B) = \frac{1-\text{Tang.}B}{1+\text{Tang.}B}, \text{ aber}$$

$$\frac{1-\text{Tang.}B}{1+\text{Tang.}B} = \frac{c-b}{c+b}, \text{ also}$$

$$\text{Tang.}(45°-B) = \frac{c-b}{c+b},$$

$$2)\ c : c-b = 1 : 1-\text{Tang.}B, \text{ aber}$$

$$c = a \,.\, \text{Sin.}C = a \,.\, \text{Cos.}B, \text{ folglich, wenn}$$

statt c setzt a . Cos. B

$$a \,.\, \text{Cos.}B : c-b = 1 : 1-\text{Tang.}B, \text{ und}$$

$$a : c-b = \frac{1}{\text{Cos.}B} : 1-\text{Tang.}B, \text{ und}$$

$$a : c-b = 1 : \text{Cos.}B - \text{Cos.}B \,.\, \text{Tang.}B.$$

Nun ist $\text{Tang.}B = \frac{\text{Sin.}B}{\text{Cos.}B}$ und $\text{Tang.}B \,.\, \text{Cos.}B = \text{Sin.}B$; substituirt man diesen Werth, so bekommt man

$$a : c-b = r : \text{Cos.}B - \text{Sin.}B.$$

Nun setze man $x = 45°$ und $y = B$, so kömmt

$$\text{Sin.}(45° - B) = \text{Sin.}\,45° \cdot \text{Cos.}\,B - \text{Cos.}\,45 \cdot \text{Sin.}\,B.$$

Aber $\text{Sin.}\,45° = \text{Cos.}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, folglich

$$\text{Sin.}(45° - B) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\text{Cos.}\,B - \text{Sin.}\,B)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\text{Cos.}\,B - \text{Sin.}\,B),$$

folglich

$$\text{Sin.}(45° - B) \cdot \sqrt{2} = \text{Cos.}\,B - \text{Sin.}\,B.$$

§. 102.

Nach diesen Formeln kann man alle Fälle auflösen, die bey rechtwinklichten ebenen Dreyecken vorkommen können. Denn man findet

1) die Hypotenuse
   a) aus den beyden Katheten nach 1.
   b) aus jeder Kathete und dem ihr gegenüberliegenden Winkel nach 3; denn es ist auch $a = \frac{c}{\text{Sin.}\,C.}$
2) jede Kathete
   a) aus der Hypotenuse und einem Winkel. 4.
   b) aus der andern Kathete und einem Winkel. 4.
   c) aus der andern Kathete und der Hypotenuse. 2.

3) jeden Winkel

a) aus beyden Katheten. 6.

b) aus der Hypotenuse und einer Kathete nach 5, 7 und 8.

Die letzten Formeln dienen, wenn unter den gegebenen Dingen bloß die Summe oder Differenz zweyer Seiten vorkommt.

III. Formeln für schiefe ebene Dreyecke.

§. 103.

1. $a \cdot \text{Sin}\, B = b \cdot \text{Sin}.\, A.$

2. $\text{Tang}.\, \frac{1}{2}(C - B) = \frac{c - b}{c + b} \cdot \text{Cot}.\, \frac{1}{2} A.$

3. $\text{Sin}.\, C = \text{Sin}.\, A \cdot \text{Cof}.\, B + \text{Cof}.\, A \cdot \text{Sin}.\, B.$

4. $c = a \cdot \text{Cof}.\, B + b \cdot \text{Cof}.\, A.$

5. $\text{Tang}.\, B = \frac{b \cdot \text{Sin}.\, A}{c - b \cdot \text{Cof}.\, A} = \frac{\text{Sin}.\, A}{\frac{c}{b} - \text{Cof}.\, A}$

6. $\text{Cot}.\, B = \frac{c}{b \cdot \text{Sin}.\, A} - \text{Cot}.\, A.$

7. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{Cof}.\, A.$

8. $\text{Cof}.\, A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$

9. $\text{Cof}.\, \frac{1}{2} A^2 = \frac{(b + c + a) \cdot (b + c - a)}{4bc}.$

10. $\text{Sin}.\, \frac{1}{2} A^2 = \frac{(a + b - c) \cdot (a - b + c)}{4bc}.$

11. $\text{Sin}.\, A^2 = \frac{(a + b + c) \cdot (b + c - a) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b - c)}{4b^2 c^2}.$

12.

12. $n = b \cdot \text{Cof. } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

13. $m = c - b \cdot \text{Cof. } A = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$.

14. $p = \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{\frac{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}{}}$.

15. $T = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}$,

16. $(c+b) \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} A = (c-b) \cdot \text{Cot. } \frac{1}{2} (C-B)$.

17, $(c+b) \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} (C-B) = (c-b) \cdot \text{Cot. } \frac{1}{2} A$.

18. $a \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(C-B) = (c-b) \cdot \text{Cof. } \frac{1}{2} A$.

19. $a \cdot \text{Cof. } \frac{1}{2}(C-B) = (c+b) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2} A$.

20. $\text{Cot. } \frac{1}{2} C = \text{Tang. } \frac{1}{2} B \cdot \frac{c+b+a}{c+b-a}$.

21. $\text{Tang. } \frac{1}{2} C = \text{Tang. } \frac{1}{2} B \cdot \frac{a+(c-b)}{a-(c-b)}$.

§. 104.

Beweis für 1. In jedem ebenen Dreyeck verhalten sich die Sinus der Winkel wie die gegenüberliegenden Seiten, oder die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel; dieser Satz ist schon §. 21. der ebenen Trigonometrie erwiesen. Folglich $a : b = \text{Sin. } A : \text{Sin. } B$ und $a \cdot \text{Sin. } B = b \cdot \text{Sin. } A$.

§. 105.

Beweis für 2.

Weil $c : b = \text{Sin. } C : \text{Sin. } B$, so ist auch

$c + b : c - b = \text{Sin. } C + \text{Sin. } B : \text{Sin. } C - \text{Sin. } B$,

aber

$$\text{Sin. } C + \text{Sin. } B : \text{Sin. } C - \text{Sin. } B = \frac{\text{Sin. } C + \text{Sin. } B}{\text{Cos. } C + \text{Cos. } B} : \frac{\text{Sin. } C - \text{Sin. } B}{\text{Cos. } C + \text{Cos. } B}$$

$$= \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(C + B) : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(C - B),$$

also $c + b : c - b$

$$= \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(C + B : \text{Tang. } \tfrac{1}{2}(C - B).$$

Aber $\frac{1}{2}(C + B) = \frac{1}{2}(180 - A) = 90° - \frac{1}{2} A$,

also $\text{Tang. } \frac{1}{2}(C + B) = \text{Tang. } (90° - \frac{1}{2} A)$

$= \text{Cot. } \frac{1}{2} A$, folglich

$c + b : c - b = \text{Cot. } \frac{1}{2} A : \text{Tang. } \frac{1}{2}(C - B)$ und

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{c - b}{c + b} \cdot \text{Cot. } \tfrac{1}{2} A.$$

§. 106.

Beweis für 3.

Weil die 3 Winkel eines Dreyecks $= 180°$ sind oder $A + B + C = 180°$, folglich $C = 180 - (A + B)$ und Supplementswinkel gleiche Sinus haben, so ist $\text{Sin. } C = \text{Sin. } (A + B)$ $= \text{Sin. } A \cdot \text{Cos. } B + \text{Cos. } A \cdot \text{Sin. } B$.

§. 107.

§. 107.

Beweis für 4.

Aus dem §. 105. folgt

$$c = \frac{b \,.\, \text{Sin. C.}}{\text{Sin. B.}}$$

$$= \frac{b.\ \text{Sin. (A+B)}}{\text{Sin. B.}}.$$

Aber $\text{Sin. B} = \frac{b \,.\, \text{Sin. A}}{a}$, also

$$c = \frac{\frac{b \,.\, \text{Sin. (A+B)}}{b \,.\, \text{Sin. A}}}{a}$$

$$= \frac{a \,.\, \text{Sin. (A+B)}}{\text{Sin. A.}}$$

$$= \frac{a \,.\, (\text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. B} + \text{Cos. A} \,.\, \text{Sin. B})}{\text{Sin. A.}}, \text{ also}$$

$$c = \frac{a \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. B}}{\text{Sin A.}} + \frac{a \,.\, \text{Cos. A} \,.\, \text{Sin. B}}{\text{Sin. A}}, \text{ also}$$

$$c = a \,.\, \text{Cos. B} + \frac{a \,.\, \text{Cos. A} \,.\, \text{Sin. B}}{\text{Sin. A}}, \text{ aber}$$

$\frac{a \,.\, \text{Sin. B}}{\text{Sin. A}} = b$, folglich

$$c = a \,.\, \text{Cos. B} + b \,.\, \text{Cos. A.}$$

§. 108.

Beweis für 5,

nämlich $\text{Tang. B} = \frac{b \,.\, \text{Sin. A}}{c - b \,.\, \text{Cos. A}} = \frac{\text{Sin. A}}{\frac{c}{b} - \text{Cos. A}}$.

Es ist $\text{Tang. B} = \frac{a \,.\, \text{Sin. B}}{a \,.\, \text{Cos. B}}$, aber $a \,.\, \text{Sin. B} = b \,.\, \text{Sin. A}$, also

$\text{Tang. B} = \frac{b \,.\, \text{Sin. A}}{a \,.\, \text{Cos. B}}$, aber $a \,\text{Cos. B} = c - b \,.\, \text{Cos. A}$, also

Tang.

$\text{Tang. B} = \frac{b \cdot \text{Sin. A.}}{c - b \cdot \text{Cos. A}}$; und wenn man rechter Hand Zähler und Nenner durch b dividirt,

$$\text{Tang. B} = \frac{\text{Sin. A}}{\frac{c}{b} - \text{Cos. A.}}$$

§. 109.

Beweis der 6ten Formel: $\text{Cot. B} = \frac{c}{b \cdot \text{Sin. A}} - \text{Cot. A.}$

Nämlich $\text{Cot. B} = \frac{1}{\text{Tang. B}}$, aber (nach dem vorigen §.) ist $\text{Tang. B} = \frac{b \cdot \text{Sin. A}}{c - b \cdot \text{Cos. A}}$, also

$$\frac{1}{\text{Tang. B}} = \frac{c - b \cdot \text{Cos. A}}{b \cdot \text{Sin. A}} = \frac{c}{b \cdot \text{Sin. A}} - \frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$$

$= \frac{c}{b \cdot \text{Sin. A}} - \text{Cot. A}$; also $\text{Cot. B} = \frac{c}{b \cdot \text{Sin. A}} - \text{Cot. A.}$

§. 110.

Beweis der Formel 7:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{Cos. A.}$$

Aus 4 ist $c - b \cdot \text{Cos. A} = a \cdot \text{Cos. B}$,

folglich, wenn man quadrirt,

$$c^2 - 2cb \,\text{Cos. A} + b^2 \cdot \text{Cos. A}^2 = a^2 \cdot \text{Cos. B}^2, \text{ aber}$$

$$\text{Cos. A}^2 = 1 - \text{Sin. A}^2$$

$$\text{Cos. B}^2 = 1 - \text{Sin. B}^2$$

$$= 1 - \frac{b^2 \cdot \text{Sin. A}^2}{a^2}.$$

Bringt

Bringt man diese Werthe in obige Gleichung, so hat man $c^2 - 2bc \text{ Cos. } A + b^2 - b^2 . \text{Sin. } A^2 = a^2 - b^2 . \text{Sin. } A^2$, oder wenn man $- b^2 . \text{Sin. } A^2$ rechter Hand auf die andere Seite hinüberbringt, wo es sich gegen $— b^2 . \text{Sin. } A^2$ aufhebt, so hat man $c^2 + b^2 - 2bc . \text{Cos. } A = a^2$.

§. 111.

Der Beweis der Formel 8 folgt aus 7.

Beweis der Formel 9:

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{(b+c+a) . (b+c-a)}{4bc}.$$

$$\text{Cos. } A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \text{ und}$$

$$1 \pm \text{Cos. } A = 1 \pm \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc \pm b^2 \pm c^2 \mp a^2}{2bc}.$$

Aus I. 36 folgt $1 + \text{Cos. } A = 2 \text{ Cos. } \tfrac{1}{2} A^2$

$$= \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a) . (b+c-a)}{2bc}.$$

§. 112.

Beweis der Formel 10:

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{(a+b-c) . (a-b+c)}{4bc}.$$

Aus

Aus I. 36 folgt $1 - \text{Cos. } A. = 2\text{Sin. } \frac{1}{2} A^2$

$$= 1 - \frac{(c^2+b^2-a^2)}{2bc} = \frac{2bc+a^2-c^2-b^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c) \cdot (a-b+c)}{2bc}, \text{ also}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{(a+b-c) \cdot (a-b+c)}{4bc}.$$

§. 113.

Beweis der Formel 11: $\text{Sin. } A^2$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}{4b^2c^2}.$$

Nämlich $\text{Sin. } A^2 = 1 - \text{Cos. } A^2$

$$= (1 + \text{Cos. } A) \cdot (1 - \text{Cos. } A)$$

$$= \frac{(b+c+a) \cdot (b+c-a)}{2bc} \cdot \frac{(a+b-c) \cdot (a+c-b)}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}{4b^2c^2}.$$

§. 114.

Beweis der Formeln 12 und 13:

$$n = b \cdot \text{Cos. } A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

$$m = c - b \cdot \text{Cos. } A. = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}.$$

Nach der Figur 58 ist $n = b \cdot \text{Cos. } A$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \text{ also}$$

$$m = c - n = c - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

$$= \frac{2c^2-b^2-c^2+a^2}{2c}$$

$$= \frac{c^2-b^2+a^2}{2c}.$$

§. 115.

§. 115.

Beweise der Formeln 14 und 15:

$$p = \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{\frac{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}{}}$$

$$\text{und } T = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}.$$

p bedeutet das Perpendikel von der Spitze des Dreyecks auf die Grundlinie oder auf die verlängerte Grundlinie; T ist des Dreyecks Flächeninhalt.

Aus der Formel 11 folgt

$\text{Sin. } A^2 = \frac{u^2}{4b^2c^2}$ (wo durch u^2 der Zähler obigen Bruchs bezeichnet wird).

Also $\text{Sin. } A = \frac{u}{2bc}$, aber

$1 : \text{Sin. } A = b : p$, also

$$p = b \cdot \text{Sin. } A$$
$$= \frac{bu}{2bc}$$
$$= \frac{u}{2c} = \frac{1}{2c} \cdot u.$$

$$T = \frac{c \cdot p}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{u}{2c}$$
$$= \frac{u}{4} = \frac{1}{4} u,$$ wo man für u obigen Werth wieder setzen muß.

§. 116.

Beweise der Formeln 16 und 17:

$$(c+b) \cdot \text{Tang.}\tfrac{1}{2}A = (c-b) \cdot \text{Cot.}\tfrac{1}{2}(C-B) \text{ und}$$

$$(c+b) \cdot \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C-B) = (c-b) \cdot \text{Cot.}\tfrac{1}{2}A.$$

Aus III. 2 ist

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{c-b}{c+b} \cdot \text{Cot.}\tfrac{1}{2}A, \text{ aber}$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{1}{\text{Cot.}\frac{1}{2}(C-B)}, \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{\text{Cot.}\frac{1}{2}A}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{\text{Cot.}\frac{1}{2}(C-B)} = \frac{c-b}{c+b} \cdot \frac{1}{\text{Tang.}\frac{1}{2}A}, \text{ oder}$$

$$\frac{c+b}{\text{Cot.}\frac{1}{2}(C-B)} = \frac{c-b}{\text{Tang.}\frac{1}{2}A}, \text{ folglich}$$

$$(c+b) \cdot \text{Tang.}\tfrac{1}{2}A = (c-b) \cdot \text{Cot.}\tfrac{1}{2}(C-B).$$

Ferner bekommt man die Formel 17, wenn man die Formel III. 2 mit $c+b$ multiplicirt.

§. 117.

Beweise der Formeln 18 und 19:

$$a \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(C-B) = (c-b) \cdot \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A$$

$$a \cdot \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(C-B) = (c+b) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}A.$$

Aus III. 1 ist

$$c = \frac{a \cdot \text{Sin.}C}{\text{Sin.}A} \text{ und } b = \frac{a \cdot \text{Sin.}B}{\text{Sin.}A}, \text{ folglich}$$

$$c-b = \frac{a \cdot \text{Sin.}C}{\text{Sin.}A} - \frac{a \cdot \text{Sin.}B}{\text{Sin.}A}$$

=

$= \frac{a\,(\text{Sin. C} - \text{Sin. B})}{\text{Sin. A}}$, folglich

$(c-b)\,.\,\text{Sin. A} = a(\text{Sin. C} - \text{Sin. B})$, und

$\frac{(c-b)\,.\,\text{Sin. A}}{\text{Sin. C} - \text{Sin. B}} = a$, oder

$\frac{(c-b)\,.\,\text{Sin.}(C+B)}{\text{Sin. C} - \text{Sin. B}} = a$, weil $\text{Sin.}(C+B)$ $= \text{Sin. A}$, folglich

$\frac{(c-b)\,.\,2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C+B)}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C+B)}$ (aus II. 35 und 28) $= a$, oder

$a = \frac{(c-b)\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(C-B)}$, und

$a\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C-B) = (c-b)\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)$, oder

$a\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C-B) = (c-b)\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}A$, weil

$\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B) = \text{Sin.}(90° - \frac{1}{2}A)$

$= \text{Cof.}\frac{1}{2}A.$

Eben so $c+b = \frac{a\,.\,(\text{Sin. C} + \text{Sin. B})}{\text{Sin. A}}$, und

$(c+b)\,\text{Sin. A} = a(\text{Sin. C} + \text{Sin. B})$, und

$\frac{(c+b)\,.\,\text{Sin. A}}{\text{Sin. C} + \text{Sin. B}} = a$, oder

$a = \frac{(c+b)\,.\,\text{Sin.}(C+B)}{\text{Sin. C} + \text{Sin. B}}$

$= \frac{(c+b)\,.\,2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C+B)}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C-B)}$

$= \frac{(c+b)\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C+B)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(C-B)}$, also

$a\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C-B) = (c+b)\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C+B)$,

oder

$a\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(C-B) = (c+b)\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}A.$

§. 118.

Beweise der Formeln 20 und 21:

Die Formel III. 2 giebt Tang. $\frac{1}{2}(C-B)$

$= \frac{c-b}{c+b} \cdot$ Cot. $\frac{1}{2}A$, oder $\frac{1}{\text{Cot. }\frac{1}{2}(C-B)}$

$= \frac{c-b}{c+b} \cdot \frac{1}{\text{Tang. }\frac{1}{2}A}$, also Tang. $\frac{1}{2}A$

$= \frac{c-b}{c+b} \cdot$ Cot. $\frac{1}{2}(C-B)$ und Tang. $\frac{1}{2}A \cdot \frac{c+b}{c-b}$

$=$ Cot. $\frac{1}{2}(C-B)$ oder Cot. $\frac{1}{2}(C-B)$

$= \frac{c+b}{c-b} \cdot$ Tang. $\frac{1}{2}A$.

Nun sey im Dreyeck ABC Fig. 59. bekannt die Seite BC und $BA + AC$ oder $BA - AC$.

Im ersten Fall verlängere man AB bis AD $= AC$ wird, so ist im Dreyeck BCD bekannt BC, BD, B und $D = ACD$.

Wendet man nun die eben gefundene Formel Cot. $\frac{1}{2}(C-B) = \frac{c+b}{c-b} \cdot$ Tang. $\frac{1}{2}A$ auf das Dreyeck BCD und den Winkel B an, so hat man Cot. $\frac{1}{2}(BCD-D) =$ Cot. $\frac{1}{2}ACB$

$= \frac{(c+b)+a}{(c+b)-a} \cdot$ Tang. $\frac{1}{2}B$.

Im zweyten Fall mache man $AE = AC$, so ist im Dreyeck BCE bekannt BC, BE, B und $E = ACE$, und also ist wie zuvor

Cot.

$$\text{Cot.}\tfrac{1}{2}(BEC-BCE) = \frac{a+(c-b)}{a-(c-b)} \cdot \text{Tang.}\tfrac{1}{2}B;$$

aber

$$BEC = 180° - AEC$$
$$= 180° - ACE, \text{ weil } AEC = ACE,$$

und

$$BCE = BCA - ACE, \text{ also}$$
$$\text{Cot.}\tfrac{1}{2}(BEC-BCE) = \text{Cot.}(90° - \tfrac{1}{2}BCA)$$
$$= \text{Tang.}\tfrac{1}{2}BCA, \text{ also}$$
$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}C = \frac{a+(c-b)}{a-(c-b)} \cdot \text{Tang.}\tfrac{1}{2}B.$$

§. 119.

I. Die Formeln oder Gleichungen von 1 — 11 begreifen alle Fälle, die bey schiefwinklichten Dreyecken vorkommen können. Denn

1) findet man nach 1 aus zwey Winkeln und einer Seite die beyden andern Seiten.

2) aus zwey Seiten und einem gegenüberstehenden Winkel findet man

a) die beyden andern Winkel nach 1.

b) die dritte Seite nach 4 oder nach 1, wenn man zuvor die andern Winkel gefunden hat.

3) aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel findet man

a) die beyden andern Winkel nach 2, 5, 6.

b) die dritte Seite nach 7 oder nach 1, wenn zuvor die beyden andern Winkel gefunden sind.

4) aus den drey Seiten die Winkel nach

8 — 11.

II. Der Fall a unter 2 kann zweydeutig seyn, wenn von den gegebenen Seiten diejenige, die dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, kleiner ist als die anliegende. Der gesuchte Winkel nämlich kann spitz oder der stumpfe Nebenwinkel seyn, wie man sich leicht durch eine Zeichnung deutlich machen kann.

III. Die Formeln 12 — 15 lehren aus drey Seiten des Dreyecks den Inhalt, die Höhe und die Abschnitte der Grundlinie finden.

IV. Die Formeln 16 — 21 dienen dazu, wenn unter den gegebenen Stücken von 2 Dingen nur die Summe oder der Unterschied bekannt ist.

Viertes Kapitel.

Aufgaben aus der analytischen Trigonometrie.

§. 120.

In einem gleichschenklichten Dreyeck ABC (Fig. 60.) ist die Grundlinie AB = c und der Winkel an der Grundlinie = A gegeben; man soll 1) die Seite AC; 2) die Höhe CD und 3) den Inhalt des Dreyecks finden.

1) Wenn AC = r = Sin. tot., so ist AD = Cos. A (§. 3. Trig.), also Cos. A : r = AD : AC oder Cos. A : r = $\frac{c}{2}$: AC, also AC = $\frac{cr}{2 \text{ Cos. A}}$.

2) Wenn AD = r, so ist DC = Tang. A (§. 4. Trig.), also r : Tang. A = AD : CD oder r : Tang. A = $\frac{c}{2}$: CD und CD = $\frac{c \text{ . Tang. A}}{2r}$.

3) $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ AB . CD (§. 91. Geo.) = $\frac{c}{2} \cdot \frac{c \text{ . Tang. A}}{2r} = \frac{c^2 \text{ . Tang. A}}{4r}$.

Anmerk. Alle diese Formeln lassen sich bequem durch Logarithmen berechnen. Z. B. $\triangle$ ABC = 2 . log. c + log. tang. A − log. 4 − log. r.

§. 121.

§. 121.

In einem gleichschenklichten Dreyeck ABC (Fig. 60.) ist die Grundlinie AB = c und der Winkel an der Spitze ACB = C gegeben; man soll 1) die Seite AC; 2) die Höhe CD; 3) den Inhalt des Dreyecks finden.

In einem gleichschenklichten Dreyeck theilt die senkrechte Linie CD von der Spitze C auf die Grundlinie AB sowohl den Winkel an der Spitze als auch die Grundlinie in 2 gleiche Theile (§. 58. Geom.); also ist der Winkel $ACD = \frac{1}{2}C$ und $AD = \frac{c}{2}$.

1) Im Dreyeck ACD ist $AC = r =$ Sin. tot. und $AD =$ Sin. $\frac{1}{2}C$; also Sin. $\frac{1}{2}C : r = \frac{c}{2} : AC$ und $AC = \frac{cr}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}C}$.

2) Wenn $CD = r$, so wird $AD =$ Tang. $\frac{1}{2}C$; deshalb Tang. $\frac{1}{2}C : r = \frac{c}{2} : CD$ und $CD = \frac{cr}{2 \text{ Tang. } \frac{1}{2}C}$.

3) Dreyeck $ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{c}{2} \cdot \frac{cr}{2 \text{ Tang. } \frac{1}{2}C} = \frac{c^2 r}{4 \text{ Tang. } \frac{1}{2}C}$.

§. 122.

Zur eignen Uebung mögen folgende zwey Aufgaben dienen:

1)

1) In einem gleichschenklichten Dreyeck ABC (Fig. 60.) ist die Seite $AC = b$ und der Winkel an der Grundlinie oder A gegeben; man soll 1) die Grundlinie AB; 2) die Höhe CD; 3) den Inhalt des Dreyecks finden.

Man wird finden: 1) $AB = \frac{2b \cdot \text{Cof. A}}{r}$.

2) $CD = \frac{b \cdot \text{Sin. A}}{r}$. 3) $\triangle ABC = \frac{b^2 \cdot \text{Sin. A} \cdot \text{Cof. A}}{r^2}$.

2) In einem gleichschenklichten Dreyeck ABC (Fig. 60.) ist die Seite $AC = b$ und der Winkel an der Spitze $ACB = C$ gegeben; man soll 1) die Grundlinie AB; 2) die Höhe CD; 3) des Dreyecks Flächeninhalt finden.

Man wird finden: 1) $AB = \frac{2b \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}C}{r}$.

2) $CD = \frac{b \cdot \text{Cof. } \frac{1}{2}C}{r}$. 3) $\triangle ABC = \frac{b^2 \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}C \cdot \text{Cof. } \frac{1}{2}C}{r^2}$.

§. 123.

Es ist ein Quadrat ABCD (Fig. 61.), dessen Seite $AB = a$, gegeben; man soll die Seite $EF = x$ eines gleichseitigen Dreyecks EFG finden, dessen Flächeninhalt dem des Quadrats gleich ist.

Inhalt des Quadrats $=$ AB . BC $=$ AB^2 $= a^2$ (§. 85. Geom.). Da das Dreyeck gleichseitig ist, so ist EF $=$ FG $=$ x und jeder Winkel $=$ 60° (§. 67. Geom.). Im Dreyeck EHG ist EG Radius und GH $=$ Sin. E $=$ Sin. 60°, also EG : GH $=$ r : Sin. 60° oder x : GH $=$ r : Sin. 60° und GH $=$ $\frac{x \text{ . Sin. } 60°}{r}$. Diese Höhe multiplicire man mit der Hälfte der Grundlinie EF $=$ $\frac{x}{2}$, so ist der Inhalt des Dreyecks EFG $=$ $\frac{x^2 \text{ . Sin. } 60°}{2r}$ (§. 91. Geom.); also vermöge der Bedingung $\frac{x^2 \text{ . Sin. } 60°}{2r} = a^2$ und x^2 . Sin. 60° $= 2a^2r$ und $x^2 = \frac{2a^2r}{\text{Sin. } 60°}$ und $x = \frac{\sqrt{2a^2r}}{\sqrt{\text{Sin } 60°}}$.

Anmerk. Will man diese Formel durch Hülfe der Logarithmen berechnen, so ist log. x $=$ $\frac{1}{2}$log. 2 $+$ log. a $+$ $\frac{1}{2}$log. r $-$ $\frac{1}{2}$log. Sin. 60°.

§. 124.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 62.) Grundlinie AB $=$ c und die Winkel an der Grundlinie A und B sind gegeben; man soll daraus desselben Inhalt finden.

Da die Winkel A und B gegeben sind, so weiß man auch den Winkel C (§. 67. Geom.), und um die Höhe CD zu finden, muß man die Seite AC

be:

berechnen, nämlich Sin. C : AB = Sin. B : AC (§. 21. Trig.) oder Sin. C : c = Sin. B : AC und $AC = \frac{c \cdot \text{Sin. B.}}{\text{Sin. C.}}$. Nun kann man im △ ADC die Höhe CD berechnen, nämlich AC = r und CD = Sin. A (§. 2. Trig.), oder r : Sin. A = AC : CD und r : Sin. A = $\frac{c \cdot \text{Sin. B.}}{\text{Sin. C.}}$: CD und $CD = \frac{c \cdot \text{Sin. A} \cdot \text{Sin. B}}{r \cdot \text{Sin. C}}$. Multiplicirt man dies mit $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{c}{2}$, so ist des Dreyecks Inhalt = $\frac{c^2 \cdot \text{Sin. A} \cdot \text{Sin. B}}{2r \cdot \text{Sin. C}}$.

§. 125.

Eines bey C rechtwinklichten Dreyecks ACB (Fig. 62.) Hypotenuse AB = c nebst dem Winkel A sind gegeben; man soll beyde Katheten AC, BC nebst dem Flächeninhalte desselben finden.

Im Dreyeck ABC ist AB = r und AC = Cos. A, also r : Cos. A = AB : AC und $AC = \frac{AB \cdot \text{Cos. A}}{r} = \frac{c \cdot \text{Cos. A}}{r}$. In demselben Dreyeck ist AB = r und BC = Sin. A, also r : Sin. A = c : BC und $BC = \frac{c \cdot \text{Sin. A}}{r}$. Im Dreyeck ADC ist AC = r und CD = Sin. A, also r : Sin. A = AC : CD, oder r : Sin. A = $\frac{c \cdot \text{Cos. A}}{r}$: CD und CD =

$\frac{c \cdot \text{Cos. } A \cdot \text{Sin. } A}{r^2}$, und endlich des Dreyecks Inhalt $= CD \cdot \frac{1}{2} AB = CD \frac{1}{2} c = \frac{c^2 \cdot \text{Cos. } A \cdot \text{Sin. } A}{2 r^2}$.

§. 126.

Eines regulären Polygons ABDEF (Fig. 63.) Seitenzahl $= n$, Polygonseite AB $= a$ und Polygonwinkel $FAB = p$ sind gegeben; man soll 1) den Radius AC des umschriebenen Kreises; 2) die Dreyeckhöhe CG; 3) des Polygons Flächeninhalt finden.

1) $FAB = p$ und $CAG = \frac{1}{2} p$ (§. 165. Geom.), und $AG = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$ (§. 108. Geom.). Im $\triangle ACG$ ist $AC = r$ und $AG = \text{Cos. } \frac{1}{2} p$ und $\text{Cos. } \frac{1}{2} p : r = \frac{a}{2} : AC$ und $AC = \frac{a r}{2 \text{ Cos. } \frac{1}{2} p}$.

2) Im $\triangle AGC$ ist $AG = r$ und $CG = \text{Tang. } \frac{1}{2} p$; also $r : \text{Tang. } \frac{1}{2} p = \frac{a}{2} : CG$ und $CG = \frac{a \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} p}{2 r}$.

3) Der Inhalt des Dreyecks $ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CG = \frac{a}{2} \cdot \frac{a \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} p}{2 r} = \frac{a^2 \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} p}{4 r}$.

Das Polygon besteht aber aus so vielen gleichen Dreyecken als es Seiten $= n$ hat (§. 165. Geo.); also Inhalt des Polygons ABDEF $= n \cdot \triangle ABC = \frac{a^2 \cdot n \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} p}{4 r}$.

§. 127.

§. 127.

Eines regulären Polygons ABDEF (Fig. 63.) Seitenanzahl = n, Radius des umschriebenen Kreises AC = b und Mittelpunctswinkel ACB = c sind gegeben; man soll 1) die Polygonseite AB; 2) die Höhe CG; 3) des Polygons Inhalt finden.

1) Winkel $ACG = \frac{1}{2}c$ (§. 58. Geom.). Im $\triangle ACG$ ist $AC = r$ und $AG = \text{Sin. } \frac{1}{2}c$; also $r : \text{Sin. } \frac{1}{2}c = b : AG$ und $AG = \frac{b \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}c}{r}$ und $2AG = AB = \frac{2b \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}c}{r}$ (§. 108. Geom.).

2) Wenn $AC = r$, ist $CG = \text{Cos. } \frac{1}{2}c$, daher $r : \text{Cos. } \frac{1}{2}c = b : CG$ und $CG = \frac{b \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}c}{r}$.

3) $\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot CG$ (§. 91. Geo.) $= AG \cdot CG = \frac{b \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}c}{r} \cdot \frac{b \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}c}{r} = \frac{b^2 \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}c \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}c}{r^2}$ und $n \cdot ABC =$ Polygon $ABDEF = \frac{b^2 \cdot n \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2}c \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}c}{r^2}$.

§. 128.

Zur Uebung folgende zwey Aufgaben:

1) Eines regulären Polygons ABDEF (Fig. 63.) Seitenzahl = n, Polygonseite

AB

AB = a und Mittelpunctswinkel ACB = c sind gegeben; man soll 1) den Radius des umschriebenen Kreises AC; 2) die Höhe CG und 3) des Polygons Flächeninhalt finden.

Man findet: 1) $AC = \frac{ar}{2 \text{Sin.} \frac{1}{2}c}$; 2) $CG = \frac{ar}{2 \text{Tang.} \frac{1}{2}c}$; 3) Polygon $= \frac{a^2 nr}{4 \text{Tang.} \frac{1}{2}c}$.

2) Eines regulären Polygons ABDEF (Fig. 63.) Seitenanzahl = n, Radius AC = b des umschriebenen Kreises und der Polygonwinkel FAB = p sind gegeben; man soll 1) die Polygonseite AB; 2) die Höhe CG; 3) des Polygons Inhalt finden.

Man wird finden: 1) $AB = \frac{2b \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2}p}{r}$; 2) $CG = \frac{b \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2}p}{r}$; 3) Polygon $= \frac{nb^2 \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2}p \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2}p}{r^2}$.

§. 129.

In einem Trapezium ABCD (Fig. 64.) sind beyde Diagonale AC = d und DB = δ nebst dem Winkel AKD = n, unter welchem sie sich schneiden, gegeben; man soll desselben Flächeninhalt finden.

Man ziehe EH und FG parallel mit AC, ferner FE und GH parallel mit BD (§. 65. Geom.), so ist

△ ABK

$$\triangle ABK = \tfrac{1}{2} AKBF$$
$$\triangle CBK = \tfrac{1}{2} CKBG$$
$$\triangle ADK = \tfrac{1}{2} AKDE$$
$$\triangle CKD = \tfrac{1}{2} CKDH$$

$$\text{Trap. } ABCD = \tfrac{1}{2} EHGF$$

$AC = EH = d$ und $DB = EF = \delta$. Vermöge der Construction ist der Winkel $AKD = AED = n$ (§. 74. Geom.). Man ziehe FN senkrecht auf EH (§. 44. Geom.), so ist im $\triangle FEN$ Radius $= r = EF$ und $FN = \text{Sin. } n = \text{Sin. } E$ (§. 74. Geom.); also $EF : FN = r : \text{Sin } n$ oder $\delta : FN = r : \text{Sin. } n$ und $FN = \frac{\delta \cdot \text{Sin. } n}{r}$. Nun ist das Parallelogramm $EFGH = EH \cdot FN$ (§. 87. Geom.) $= \frac{d\delta \text{ Sin. } n}{r}$ und $\frac{1}{2} EFGH = \text{Trap. } ABCD = \frac{d\delta \text{ Sin. } n}{2r}$.

§. 130.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 62.) zwey Seiten $AC = b$ und $AB = c$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $BAC = a$ sind gegeben; man soll einen der andern Winkel $= B$ finden.

Man ziehe CD senkrecht auf AB und suche sowohl CD als das Stück AD. Im $\triangle ADC$

ist

ist AC : CD = r : Sin. A oder b : CD = r : Sin. A. und CD = $\frac{b \cdot \text{Sin. A}}{r}$. In demselben Dreyeck ist AC : AD = r : Cos. A. oder b : AD = r : Cos. A und AD = $\frac{b \cdot \text{Cos. A}}{r}$. Aber DB = AB — AD = c — $\frac{b \cdot \text{Cos. A}}{r}$ = $\frac{cr - b \text{ Cos. A}}{r}$. Im Dreyeck BDC ist BD = r und DC = Tang. B, also DB : DC = r : Tang. B oder $\frac{cr - b \text{ Cos. A}}{r} : \frac{b \cdot \text{Sin. A.}}{r}$ = r : Tang. B, oder cr — b . Cos. A : b Sin. A = r : Tang. B, also Tang. B = $\frac{r\,b \cdot \text{Sin. A}}{cr - b \cdot \text{Cos. A}}$.

§. 131.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 62.) zwey Seiten AC = b und AB = c nebst dem eingeschlossenen Winkel CAB = A sind gegeben; man soll die Seite CB finden, ohne daß man einen der andern Winkel sucht.

Man ziehe CD senkrecht auf AB und CB = x. Im △ ADC kann man AD finden, nämlich AC = r und AD = Cos. A (§. 3. Trig.); also AC : AD = r : Cos. A oder b : AD = r : Cos. A und AD = $\frac{b \cdot \text{Cos. A}}{r}$; aber $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD$ (§. 101.

(§. 101. Geo.), oder $x^2 = b^2 + c^2 - \frac{2bc\,Cof.A}{r}$;

also $x = \sqrt{\left(b^2 + c^2 - \frac{2bc\,Cof.A}{r}\right)}$.

§. 132.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 62.) drey Seiten sind gegeben, nämlich $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$; man soll den Winkel A finden.

Man ziehe die senkrechte Linie CD und suche AD im Dreyeck ADC; nämlich $AC = r$ und $AD = Cof.A$ (§. 3. Trig.); also $AC : AD = r : Cof.A$, oder $b : AD = r : Cof.A$ und $AD = \frac{b \,.\, Cof.A}{r}$. Ferner

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \,.\, AD$ (§. 101. Geom.)

$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2bc\,Cof.A}{r}$ und

$\frac{2bc\,Cof.A}{r} = b^2 + c^2 - a^2$ und

$Cof.A = \frac{r(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$.

Auf die nämliche Art findet man

$Cof.B = \frac{r(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$ und

$Cof.C = \frac{r(b^2 + a^2 - c^2)}{2ab}$.

§. 133.

§. 133.

Das Quadrat des Sinus des einfachen Bogens = a ist dem halben Quadrate des Radius, vermindert um das halbe Rechteck aus dem Radius und dem Cosinus des doppelten Bogen gleich, oder

$$\text{Sin. } a^2 = \frac{r^2 - r \text{ Cos. } 2a}{2}.$$

Aus §. 75. Num. 36 ist $\text{Cos. } 2a = \frac{2 \text{ Cos. } a^2 - r^2}{r}$, wenn man $a = \frac{1}{2} x$ und $r = 1$ setzt; aber $\text{Cos. } a^2 = r^2 - \text{Sin. } a^2$ (§. 7. Trig.) und $2 \text{ Cos. } a^2 = 2r^2 - 2 \text{ Sin. } a^2$. Dieses in die Gleichung gebracht, giebt

$$\text{Cos. } 2a = \frac{2r^2 - 2 \text{ Sin. } a^2 - r^2}{r} \text{ und}$$

$$r \text{ . Cos. } 2a = 2r^2 - 2 \text{ Sin. } a^2 - r^2 \text{ und}$$

$$2 \text{ Sin. } a^2 = r^2 - r \text{ . Cos. } 2a \text{ und}$$

$$\text{Sin. } a^2 = \frac{r^2 - r \text{ . Cos. } 2a}{2}.$$

Anmerk. Heißt der doppelte Bogen statt 2a nun a, so heißt der einfache Bogen $= \frac{1}{2} a$, und obige Formel läßt sich alsdann so ausdrücken: $\text{Sin. } \frac{1}{2} a^2 = \frac{r^2 - r \text{ . Cos. } a}{2}$.

§. 134.

Eines Dreyecks ABC (Fig. 62.) drey Seiten $BC = a$, $AC = b$ und $AB = c$ sind gegeben; man soll den Winkel $CAB = A$ finden.

Vor-

Vorhin (§. 133.) ist erwiesen, daß

$$\frac{r^2 - r \,.\, \text{Cos. } A}{2} = \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2$$

$$r^2 - r \,.\, \text{Cos. } A = 2 \,\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2$$

$$r^2 - 2 \,\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = r \,.\, \text{Cos. } A$$

$$\frac{r^2 - 2 \,\text{Sin. } \frac{1}{2} A^2}{r} = \text{Cos. } A.$$

Vorhin (§. 132.) ist erwiesen, daß

$$\text{Cos. } A = \frac{r\,(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}, \text{ also}$$

$$\frac{r^2 - 2 \,\text{Sin. } \frac{1}{2} A^2}{r} = \frac{r\,(b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ und}$$

$$2bcr^2 - 4bc \,.\, \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2 = r^2 b^2 + r^2 c^2 - r^2 a^2;$$

$$2bcr^2 - r^2 b^2 - r^2 c^2 + r^2 a^2 = 4bc \,.\, \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2$$

$$r^2 (2bc - b^2 - c^2 + a^2) = 4bc \,.\, \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2$$

$$\frac{r^2\,(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)}{4bc} = \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2.$$

Es ist aber $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

$$= (a + b - c) \,.\, (a - b + c), \text{ also}$$

$$\frac{r^2\,(a + b - c) \,.\, (a - b + c)}{4bc} = \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2.$$

Man nenne die Summe aller Seiten oder $a + b + c = p$, so ist $a - b + c = p - 2b$ und $a + b - c = p - 2c$. Diese Werthe in die Gleichung gebracht, giebt

$$\frac{r^2\,(p - 2c) \,.\, (p - 2b)}{4bc} = \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2.$$

Dieser Bruch läßt sich abbreviren durch die Division des Zählers und Nenners mit 4, so ist

$$\frac{r^2\,(\frac{1}{2}p - c) \,.\, (\frac{1}{2}p - b)}{bc} = \text{Sin. } \tfrac{1}{2} A^2.$$

§. 135.

§. 135.

Es wird für Anfänger nöthig seyn zu erklären, daß diese Formel

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{r^2(p-2c)\,.\,(p-2b)}{4bc}$$

mit 4 und nicht mit 2 dividirt werden muß, um die endliche richtige Formel

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{r^2(\frac{1}{2}p-c)\,.\,(\frac{1}{2}p-b)}{bc}$$

zu erhalten.

Wenn in der ersten Formel $p-2c$ mit $p-2b$ multiplicirt wird, so kommt $p^2-2bp-2cp+4bc$; also

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{r^2(p^2-2bp-2cp+4bc)}{4bc} \text{ und}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{r^2(\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}bp-\frac{1}{2}cp+bc)}{bc}.$$

Den Zähler dieses Bruchs bekommt man auch, wenn man $\frac{1}{2}p-c$ multiplicirt mit $\frac{1}{2}p-b$, also ist erwiesen, daß

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{r^2(\frac{1}{2}p-c)\,.\,(\frac{1}{2}p-b)}{bc}.$$

§. 136.

Diese Formel

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{r^2(\frac{1}{2}p-c)\,.\,(\frac{1}{2}p-b)}{bc}$$

giebt folgende Proportion (§. 98. Arith. :

$$bc : (\tfrac{1}{2}p-c)\,.\,(\tfrac{1}{2}p-b) = r^2 : \text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2.$$

Mit

Mit Logarithmen kann man dies auf folgende Art berechnen:

1) Man addire alle Seiten, so hat man p $= a + b + c$ und $\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

2) Von der halben Summe $= \frac{1}{2}p$ subtrahire man die beyden anliegenden Seiten c und b, so hat man die erste Differenz $= \frac{1}{2}p - c$ und die zweyte Differenz $= \frac{1}{2}p - b$.

3) Zu den Logarithmen dieser Differenzen addire man den doppelten Logarithmus des Radius oder Sinus totus.

4) Von dieser Summe subtrahire man die Summe der Logarithmen der beyden einschließenden Seiten.

5) Diese Differenz dividire man durch 2; der alsdann herauskommende Logarithmus ist log. Sin. $\frac{1}{2}$ A.

6) In den Sinus-Tafeln sucht man den dazu gehörenden Winkel auf und multiplicirt ihn mit 2, so hat man endlich Sin. A gefunden.

Beyspiel.

Im Dreyeck ABC ist AB $=$ c $=$ 625 Ellen; AC $=$ b $=$ 354 Ellen; BC $=$ a $=$ 346 Ellen.

$AB = c = 625$

$AC = b = 354$

$BC = a = 346$

$a+b+c = p = 1325$

$\frac{1}{2}p = 652,5$

Erste Differenz

$= \frac{1}{2}p-c = 37,5$ und log. $37,5 = 1,5740313$

Zweyte Differenz

$= \frac{1}{2}p-b = 308,5$ und log. $308,5 = 2,4892552$

log. $r^2 = 2$ log. $r = 20,0000000$

24,0632865

log. b = log. $354 = 2,5490033$

log. c = log. $625 = 2,7958800$

5,3448833

18,7184032

2)

log. Sin. $\frac{1}{2}A = 9,3592016$

Zu diesem Logarithmus gehört der Winkel $13°13'7''$, also $A = 26°26'14''$.

§. 137.

Diese Formel Sin. $\frac{1}{2}A^2 = \frac{r^2(\frac{1}{2}p-c).(\frac{1}{2}p-b)}{bc}$

läßt sich auch in der sphärischen Trigonometrie anwenden, wenn aus 3 Seiten ein Winkel gefunden werden soll Man bemerke nur, daß statt der geraden Linien in dem ebenen Dreyeck die Sinus der

Bo:

Bogen des sphärischen Dreyecks in die Formel kommen und diese dann so aussieht:

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{r^2 \cdot \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}p-c) \cdot \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}p-b)}{\text{Sin.}b \cdot \text{Sin.}c}.$$

Diese Formel ist von sehr ausgedehntem Nutzen und Anwendung in der Astronomie, mathematischen Geographie und Navigation zur Berechnung des Azimuths und der Zeit nach wahrer Zeit, zur Bestimmung des Laufes der Meridiane auf geographischen Karten und zur Beobachtung der Abweichung der Magnetnadel zur See.

§. 138.

Aufgabe. Die drey Winkel eines Trapeziums ABCD (Fig. 65.), nämlich A = m, B = n und C = o nebst zwey gegenüberliegenden Seiten AB = a und CD = b sind gegeben; man sucht dessen Flächeninhalt = q.

Auflösung. Man verlängere die beyden nicht gegebenen Seiten, bis sie in E sich schneiden.

In dem Dreyeck ABE sind die beyden Winkel m und n, folglich auch E und die Seite AB gegeben.

Die Proportion Sin. E : Sin. n = a : AE giebt die Seite AE oder AE

$$= \frac{a \cdot \text{Sin. } n}{\text{Sin. E}}.$$

Man

Man ziehe das Perpendikel EF; dieses ist $= AE \cdot \text{Sin. } m = \frac{a \cdot \text{Sin. } n \cdot \text{Sin. } m}{\text{Sin. } E}$, also

$$\triangle ABE = \frac{a \cdot EF}{2} = \frac{a^2 \cdot \text{Sin. } n \cdot \text{Sin. } m}{2 \text{ Sin. } E}$$

$$= \frac{a^2 \cdot \text{Sin. } n \cdot \text{Sin. } m}{2 \text{ Sin. } (m+n)}, \text{ weil Sin. } E = \text{Sin. } (180° - (m+n)) = \text{Sin. } (m+n).$$

Weil die vier Winkel eines jeden Trapeziums $= 360°$ sind, so ist, da 3 gegeben sind, auch der 4te $D = p$ gegeben, nämlich $= 360° - (m+n+o)$.

Im Dreyeck CDE sind nun die Winkel CDE und DCE auch die Seite CD bekannt, und Sin. $CDE = \text{Sin. } p$ und $\text{Sin. } DCE = \text{Sin. } o$, folglich

$$1) \triangle CDE = \frac{b^2 \cdot \text{Sin. } o \cdot \text{Sin. } p}{2 \text{ Sin. } E}$$

$$= \frac{b^2 \cdot \text{Sin. } o \cdot \text{Sin. } p}{2 \text{ Sin. } (o+p)}$$

$$= \frac{b^2 \cdot \text{Sin. } o \cdot \text{Sin. } p}{2 \text{ Sin. } (m+n)},$$

weil $m+n = o+p$, indem $m+n+E = o+p+E = 180°$ ist.

Da nun $ABCD = \triangle ABE - \triangle CDE$, so ist

$$2) q = \frac{a^2 \cdot \text{Sin. } n \cdot \text{Sin. } m}{2 \text{ Sin. } (m+n)} - \frac{b^2 \cdot \text{Sin. } o \cdot \text{Sin. } p}{2 \text{ Sin. } (m+n)}$$

$$= \frac{a^2 \cdot \text{Sin. } n \cdot \text{Sin. } m - b^2 \cdot \text{Sin. } o \cdot \text{Sin. } p}{2 \text{ Sin. } (m+n)}.$$

§. 139.

§. 139.

Aufgabe. In einem Trapezium mit parallelen Seiten ist eine dieser Seiten, die beyden anliegenden Winkel und die Höhe desselben bekannt; man verlangt den Inhalt des Trapeziums zu wissen.

Auflösung. Das Trapezium mit parallelen Seiten sey ABCD Fig. 66. oder Fig. 67. AD und BC die parallelen Seiten, PQ das Perpendikel auf diesen Seiten. Man nenne AD $= a$, PQ $= h$, den Winkel BAD $= \alpha$ und ADC $= \delta$. Den gesuchten Inhalt nenne man q.

Ziehet man AE der Seite CD parallel, so fällt sie entweder innerhalb Fig. 66. oder außerhalb des Trapeziums Fig. 67., je nachdem BC $\rangle$ oder $\langle$ AD oder $\alpha + \delta \rangle 2R$ oder $\langle 2R$ sind.

1) Wenn BC $\rangle$ AD oder $\alpha + \delta \rangle 2R$. Da die beyden Seiten des Trapeziums BC und AD parallel sind, so betragen die Winkel BAD und ABC als innere Winkel 180°, und eben so BCD + CDA $= 180°$; folglich ABE $= 180° - \alpha$, AEB $=$ DCB $= 180° - \delta$, BAE $=$ BAD $-$ EAD $+$ ADC $-$ ADC. $=$ BAD $+$ ADC $-$ (EAD $+$ ADC) $= \alpha + \delta - 180°$, weil EAD $+$ ADC als innere Winkel $= 180°$ sind.

Weil nun Winkel, die sich zu 180° ergänzen, gleiche Sinus haben, so ist Sin. ABE = Sin. α, Sin. AEB = δ, Sin. BAE = − Sin. $(\alpha+\delta)$.

Hier kommt es nun darauf an, aus den bekannten Winkeln eines Dreyecks und dessen Höhe seinen Flächeninhalt zu finden. Im Dreyeck ABE sind alle Winkel und dessen Höhe = PQ bekannt.

Nach der Gleichung 1 im vorigen §. ist

$$\triangle ABE = \frac{BE^2 . \text{Sin.}\alpha . \text{Sin.}\delta}{-2\,\text{Sin.}\,(\alpha+\delta)} = q'$$ (um es vom obigen q zu unterscheiden). Aber

$$q' = \frac{BE . h}{2}, \text{ also}$$

$$\frac{2q'}{h} = BE, \text{ folglich}$$

$$\triangle ABE = \frac{4q^2 . \text{Sin.}\alpha . \text{Sin.}\delta}{-2h^2 . \text{Sin.}\,(\alpha+\delta)}, \text{ oder}$$

$$q' = \frac{4q'^2 . \text{Sin.}\alpha . \text{Sin.}\delta}{-2h^2 . \text{Sin.}\,(\alpha+\delta)}, \text{ weil } q' = \triangle ABE, \text{ und}$$

$$\frac{q'}{q'^2} = \frac{2 . \text{Sin.}\alpha . \text{Sin.}\delta}{-h^2 . \text{Sin.}\,(\alpha+\delta)}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{q'} = \frac{2\,\text{Sin.}\,\alpha . \text{Sin.}\delta}{-h^2 . \text{Sin.}\,(\alpha+\delta)}, \text{ folglich}$$

$$q' = -\frac{h^2 . \text{Sin.}\,(\alpha+\delta}{2\,\text{Sin.}\,\alpha . \text{Sin.}\delta)}.$$

Der Inhalt des Parallelogramms AECD ist = ah. Aber ABCD = AECD + $\triangle$ ABE, folglich

$$ABCD = q = ah - \frac{h^2 . \text{Sin.}\,(\alpha+\delta)}{2\,\text{Sin.}\,\alpha . \text{Sin.}\delta}.$$

2) Wenn $BC < AD$ und $\alpha + \delta < 2R$. $ABE = \alpha$, $AEB = ADC = \delta$ (gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm ED), $BAE = 180° - (\alpha + \delta)$; also Sin. ABE $=$ Sin. α, Sin. AEB $=$ Sin. δ und Sin. BAE $=$ Sin. $(\alpha + \delta)$. Folglich

$$\triangle ABE = \frac{h^2 \cdot \text{Sin. } (\alpha+\delta)}{2 \text{ Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \delta}.$$

Der Inhalt des Parallelogramms AECD ist $= ah$, das Trapezium $ABCD = AECD - \triangle ABE$, mithin

$$q = ah - \frac{h^2 \cdot \text{Sin. } (\alpha+\delta)}{2 \text{ Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \delta}.$$

Man findet also in beyden Fällen für den Inhalt des Trapeziums einerley Ausdruck, wie auch seyn muß, indem Fig. 67. aus Fig. 66. durch Umkehrung entsteht, woraus keine Aenderung in dem Inhalt des Trapeziums entstehen kann.

Für $\alpha + \delta = 180°$, wird Sin. $(\alpha + \delta) = 0$, mithin wird $\frac{h^2 \cdot (\text{Sin. } \alpha+\delta)}{2 \text{ Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \delta} = 0$ und $q = ah$, wie auch seyn muß, weil alsdann aus dem Trapezium ein Parallelogramm wird.

Für $\alpha + \delta = 90°$ wird Sin. $(\alpha + \delta) = 1$, und Sin. $\delta =$ Sin. $(90° - \alpha) =$ Cos. α. Aus obiger Formel wird also unter diesen Bestimmungen

$$q = ah - \frac{h^2}{2 \text{ Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \alpha}$$

$$= ah - \frac{h^2}{\text{Sin. } 2\alpha} \text{ (§. 75. Form. 35).}$$

§. 140.

Aufgabe. Drey auf einander folgende Seiten eines Vierecks und die von denselben eingeschlossenen Winkel sind gegeben; der Inhalt des Vierecks wird verlangt.

Auflösung. Das Viereck sey ABCD Fig. 65.; die drey gegebenen Seiten $CB = a$, $BA = b$, $AD = c$ und die gegebenen Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$. Die beyden Seiten BC und AD treffen verlängert in E zusammen.

1) In dem Dreyeck ABE sind bekannt die Seite $AB = b$ und die Winkel $A = \alpha$ und $B = \beta$; man hat also

$$\text{Sin.}E : b = \text{Sin.}\alpha : BE, \text{ und}$$

$$BE = \frac{b \cdot \text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}E}, \text{ aber}$$

$$\text{Sin.}E = \text{Sin.}(\alpha+\beta), \text{ weil } 180°-E = \alpha+\beta, \text{ folglich}$$

$$BE = \frac{b \cdot \text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}.$$

Ferner $\text{Sin.}E : b = \text{Sin.}\beta : AE$, und

$$AE = \frac{b \cdot \text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}E}, \text{ und}$$

$$AE = \frac{b \cdot \text{Sin.}\beta}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}.$$

Endlich $\triangle ABE = \frac{b^2 \cdot \text{Sin.}\alpha \cdot \text{Sin.}\beta}{2\,\text{Sin.}(\alpha+\beta)}$ (§. 138.).

2)

2) Nun ist aber $CE = BE - BC$

$$= \frac{b \cdot \text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)} - a$$

und $DE = AE - AD$

$$= \frac{b \cdot \text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)} - c.$$

Folglich $\triangle CDE =$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{b \cdot \text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)} - a\right) \cdot \left(\frac{b \cdot \text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)} - c\right) \cdot \text{Sin.}\,(\alpha+\beta).$$

Diese Formel läßt sich aus §. 29. herleiten, wo aus zwey gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel der Inhalt des Dreyecks gefunden ward.

3)

3) $ABCD = ABE - CDE$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin.\alpha \cdot \sin.\beta}{2 \sin.(\alpha+\beta)} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b \cdot \sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta)} - a\right) \cdot \left(\frac{b \cdot \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)} - c\right) \cdot \sin.(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin.\alpha \cdot \sin.\beta}{2 \sin.(\alpha+\beta)} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2 \cdot \sin.\alpha \cdot \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)^2} - \frac{bc \sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta)} - \frac{ab \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)} + ac\right) \cdot \sin.(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin.\alpha \cdot \sin.\beta}{2 \sin.(\alpha+\beta)} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2 \cdot \sin.\alpha \cdot \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)} - bc \cdot \sin.\alpha - ab \sin.\beta + ac \cdot \sin.(\alpha+\beta)\right)$$

$$= \frac{b^2 \cdot \sin.\alpha \cdot \sin.\beta}{2 \sin.(\alpha+\beta)} - \frac{b^2 \cdot \sin.\alpha \cdot \sin.\beta}{2 \sin.(\alpha+\beta)} + \frac{bc \sin.\alpha + ab \sin.\beta - ac \sin.(\alpha+\beta)}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(bc \cdot \sin.\alpha + ab \cdot \sin.\beta - ac \cdot \sin.(\alpha+\beta)).$$

Ist $\alpha + \beta = 180°$, d. h. sind BC und AD parallel, so ist Sin. $(\alpha + \beta) = 0$ und Sin. a = Sin. β, so fällt der dritte Theil obiger Formel weg und es wird

$$ABCD = \frac{1}{2}(bc + ab) \cdot \text{Sin. } \alpha$$
$$= \frac{1}{2} b\,(c + a) \cdot \text{Sin. } \alpha.$$

§. 141.

Aufgabe. Aus der gegebenen Grundlinie eines Dreyecks, einem Winkel an derselben und dem Unterschied der beyden andern Seiten das Dreyeck zu finden.

Auflösung. Das Dreyeck sey ABC Fig. 68.; in demselben sey BC als Grundlinie gegeben, ferner der Winkel ACB und AC – AB. Man nenne BC = a, C = α und AC – AB = d.

In dem Dreyeck ABC sind eine Seite und ein anliegender Winkel bekannt; wäre noch ein Winkel z. B. A bekannt, so hätte man eine Seite und zwey Winkel, und mithin das Dreyeck selbst. Es wird also darauf ankommen, diesen zu finden. Man nenne A = x.

Man hat alsdann

Sin. x : a = Sin. B : AC, oder

$$AC = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{\text{Sin. } x}, \text{ aber}$$

Sin. B

$$\text{Sin. B} = \text{Sin. } (\alpha + x), \text{ folglich}$$

$$AC = \frac{a \text{ . Sin. } (\alpha + x)}{\text{Sin. } x}, \text{ und}$$

$$\text{Sin. } x : a = \text{Sin. } \alpha : AB \text{ und}$$

$$AB = \frac{a \text{ . Sin. } \alpha}{\text{Sin. } x}.$$

Da nun $AC - AB = DC = d$, so ist

$$d = \frac{a \text{ . Sin. } (\alpha + x)}{\text{Sin. } x} - \frac{a \text{ . Sin. } \alpha}{\text{Sin. } x}$$

$$= \frac{a \text{ (Sin. } (\alpha + x) - \text{Sin. } x)}{\text{Sin. } x}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich aus §. 75., Formel 28 folgendergestalt verändern, wenn man statt des dortigen x hier $\alpha + x$ und statt des dortigen y hier α setzt; man hat alsdann

$$\text{Sin. } (\alpha + x) - \text{Sin. } x$$

$$= 2 \text{ Cof. } \tfrac{1}{2} (2\alpha + x) \text{ . Sin. } \tfrac{1}{2} x$$

$$= 2 \text{ Cof. } (\alpha + \tfrac{1}{2} x) \text{ . Sin. } \tfrac{1}{2} x.$$

Ferner ist $\text{Sin. } x = 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} x \text{ . Cof. } \tfrac{1}{2} x$ (§. 75. F. 35.), folglich

$$d = \frac{2a \text{ Cof. } (\alpha + \frac{1}{2} x) \text{ . Sin. } \frac{1}{2} x}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} x \text{ . Cof. } \frac{1}{2} x}$$

$$= \frac{a \text{ Cof. } (\alpha + \frac{1}{2} x)}{\text{Cof. } \frac{1}{2} x}.$$

Aber $\text{Cof. } (\alpha + \frac{1}{2} x)$

$$= \text{Cof. } \alpha \text{ . Cof. } \tfrac{1}{2} x - \text{Sin. } \alpha \text{ . Sin. } \tfrac{1}{2} x, \text{ folglich}$$

$$d = \frac{a \text{ (Cof. } \alpha \text{ . Cof. } \frac{1}{2} x - \text{Sin. } \alpha \text{ . Sin. } \frac{1}{2} x)}{\text{Cof } \frac{1}{2} x}$$

$$= a \left(\text{Cof. } \alpha - \text{Sin. } \alpha \text{ . } \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} x}{\text{Cof. } \frac{1}{2} x} \right)$$

=

$= a(\text{Cof.}\,\alpha - \text{Sin.}\,\alpha \,.\, \text{Tang.}\,\frac{1}{2}x)$ (§. 75. F. 3)

und

$= a\,\text{Cof.}\,\alpha - a\,\text{Sin.}\,\alpha \,.\, \text{Tang.}\,\frac{1}{2}x$, und

$a \,.\, \text{Sin.}\,\alpha \,.\, \text{Tang.}\,\frac{1}{2}x = a \,.\, \text{Cof.}\,\alpha - d$, und

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}x = \frac{a \,.\, \text{Cof.}\,\alpha - d}{a \,.\, \text{Sin.}\,\alpha}$$

$$= \frac{\text{Cof.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,\alpha} - \frac{d}{a \,.\, \text{Sin.}\,\alpha}$$

$$= \text{Cot.}\,\alpha - \frac{d}{a \,.\, \text{Sin.}\,\alpha}.$$

Wäre $AC - AB = -d$, d. h. AB um eben so viel größer als AC, als wir es jetzt kleiner angenommen haben, so würde der letzte Theil der gefundenen Formel positiv und $\text{Tang.}\,\frac{1}{2}x = \text{Cot.}\,\alpha + \frac{d}{a \,.\, \text{Sin.}\,\alpha}$.

§. 142.

Aufgabe. Aus der gegebenen Grundlinie eines Dreyecks, der Summe der beyden andern Seiten und dem der Grundlinie gegenüberliegenden Winkel des Dreyecks zu bestimmen.

Auflösung. Das Dreyeck sey ABC Fig. 68.; man nenne die Grundlinie $BC = a$, den Winkel $A = b$ und die Summe der beyden andern Seiten oder $BA + AC = s$.

Da $B + C + b = 180°$, so ist $B + C = 180° - b$; die Summe der beyden andern

Win-

Winkel ist also bekannt; man braucht daher nur ihren Unterschied zu suchen, um jeden derselben einzeln zu bestimmen. Man nenne $ABC = x$, $ACB = y$ und $x - y = z$.

Da $x - y = z$, so ist $x = 90° - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}z$ und $y = 90° - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}z$. Nun ist Sin. b : a = Sin. x : AC, folglich $AC = \frac{a \text{ . Sin. } x}{\text{Sin. } b} = \frac{a \text{ Cos. } \frac{1}{2}(b - z)}{\text{Sin. } b}$ und Sin. b : a = Sin. y : AB, folglich $AB = \frac{a \text{ . Sin. } y}{\text{Sin. } b} = \frac{a \text{ Cos. } \frac{1}{2}(b + z)}{\text{Sin. } b}$.

Aber $AB + AC = s$, folglich

$$s = \frac{a\,(\text{Cos. } \frac{1}{2}(b - z) + \text{Cos. } \frac{1}{2}(b + z))}{\text{Sin. } b}.$$

Aber Cos. $\frac{1}{2}(b - z)$ + Cos. $\frac{1}{2}(b + z) =$ 2 Cos. $\frac{1}{2}b$. Cos. $\frac{1}{2}z$, wenn man in die Formel §. 75 . 25 für x hier $\frac{1}{2}b$ und für y hier $\frac{1}{2}z$ setzt, und Sin. b = 2 Sin. $\frac{1}{2}b$. Cos. $\frac{1}{2}b$, wenn man in die Formel §. 75 . 35 b statt x bringt; folglich

$$s = \frac{2a \text{ . Cos } \frac{1}{2}b \text{ . Cos. } \frac{1}{2}z}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}b \text{ . Cos. } \frac{1}{2}b} = \frac{a \text{ Cos } \frac{1}{2}z}{\text{Sin. } \frac{1}{2}b}, \text{ und}$$

$$\frac{s \text{ . Sin. } \frac{1}{2}b}{a} = \text{Cos. } \frac{1}{2}z.$$

Aus dieser Formel findet man also Cos. $\frac{1}{2}z$, folglich auch z oder den Unterschied der beyden unbekannten Winkel. Da nun auch deren Summe bekannt ist, so ist jeder der Winkel gefunden.

§. 143.

§. 143.

Aufgabe. Aus der bekannten Grundlinie eines Dreyecks, dem Unterschiede der beyden Winkel an derselben und dem Unterschiede der beyden andern Seiten das Dreyeck zu finden.

Auflösung. Das Dreyeck sey ABC Fig. 68.; die Grundlinie $BC = a$ ist gegeben, ferner $B - C = b$ und $AC - AB = d$.

Da der Unterschied der beyden Winkel bekannt ist, so wird man jetzt deren Summe suchen müssen, um jeden Winkel einzeln bestimmen zu können. Man nenne $B + C = x$, so ist $B = \frac{1}{2}(b + x)$ und $C = \frac{1}{2}(x - b)$ und $BAC = 180° - x$.

Es verhält sich nun

$$\text{Sin. A} : a = \text{Sin. C} : AB, \text{ also}$$

$$AB = \frac{a \cdot \text{Sin. C}}{\text{Sin. A}}, \text{ aber}$$

$$\text{Sin. A} = \text{Sin } x, \text{ und}$$

$$\text{Sin. C} = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}(x - b), \text{ folglich}$$

$$AB = \frac{a \text{ Sin. } \frac{1}{2}(x-b)}{\text{Sin. } x}.$$

Eben so

$$\text{Sin. A} : a = \text{Sin. B} : AC, \text{ also}$$

$$AC = \frac{a \text{ Sin. B}}{\text{Sin A}}, \text{ aber}$$

$$\text{Sin. B} = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}(x + b) \text{ und}$$

Sin.

$$\text{Sin. A} = \text{Sin. x}, \text{ mithin}$$

$$AC = \frac{a \text{ Sin.} \frac{1}{2}(x+b)}{\text{Sin. x}}.$$

Da nun $AC - AB = d$, so ist

$$d = \frac{a \text{ Sin.} \frac{1}{2}(x+b)}{\text{Sin. x}} - \frac{a \text{ Sin.} \frac{1}{2}(x-b)}{\text{Sin. x}}$$

$$= \frac{a\,(\text{Sin.} \frac{1}{2}(x+b) - \text{Sin.} \frac{1}{2}(x-b))}{\text{Sin. x}}.$$

Aber $\text{Sin.} \frac{1}{2}(x+b) - \text{Sin.} \frac{1}{2}(x-b)$

$= 2 \text{Cos.} \frac{1}{2}x \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2}b$ (§. 75. F. 24),

und $\text{Sin. x} = 2 \text{Sin.} \frac{1}{2}x \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2}x$, folglich

$$d = \frac{2a \text{ Cos.} \frac{1}{2}x \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2}b}{2 \text{ Sin.} \frac{1}{2}x \cdot \text{Cos.} \frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{a \text{ Sin.} \frac{1}{2}b}{\text{Sin.} \frac{1}{2}x}, \text{ und}$$

$$d \text{ Sin.} \tfrac{1}{2}x = a \text{ Sin.} \tfrac{1}{2}b \text{ und}$$

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}x = \frac{a \text{ Sin.} \frac{1}{2}b}{d}.$$

Auf die Art hat man also x oder die Summe der beyden unbekannten Winkel gefunden, deren Unterschied $= b$ gegeben war; man hat also nun jeden Winkel selbst, indem $B = \frac{1}{2}(b+x)$ und $A = \frac{1}{2}(x-b)$ ist. Da übrigens auch $BC = a$ bekannt ist, so ist nun das Dreyeck gefunden.

§. 144.

Aufgabe. Aus dem Scheitelwinkel eines Dreyecks und den Abschnitten, in welche das von der Spitze dieses Winkels auf die gegen-

genüberliegende Seite gefällte Perpendikel dieselbe theilt, das Dreyeck zu finden.

Auflösung. Im Dreyeck ABC Fig 69. ist der Scheitelwinkel $BAC = c$ und die Abschnitte $BF = a$ und $FC = b$ gegeben, in welche die Grundlinie durch das Perpendikel AF getheilt wird. Man soll das Dreyeck bestimmen.

Die Summe der beyden Winkel B und C ist bekannt, nämlich $B + C = 180° - c$; man muß also deren Unterschied suchen.

Es ist $BF = a = AF$. Tang. BAF und $CF = b = AF$. Tang. CAF, und mithin $a : b = \text{Tang. } BAF : \text{Tang. } CAF$, und folglich

$$a + b : a - b = \text{Tang. } BAF + \text{Tang. } CAF : \text{Tang. } BAF - \text{Tang. } CAF$$

$$= \frac{\text{Sin. } (BAF + CAF)}{\text{Cos. } BAF \text{ . Cos. } CAF} : \frac{\text{Sin. } (BAF - CAF)}{\text{Cos. } BAF \text{ . Cos. } CAF}$$

(§. 75. F. 31)

$$= \text{Sin. } (BAF + CAF) : \text{Sin. } (BAF - CAF)$$

$$= \text{Sin. } c : \text{Sin. } (BAF - CAF) \text{ und}$$

$$\text{Sin. } (BAF - CAF) = \frac{(a-b) \text{ . Sin. } c}{a+b}.$$

Da nun $BAF = 90° - B$ und $CAF = 90° - C$ und $BAF - CAF = 90° - B - 90 + C = C - B$, so ist

$$\text{Sin. } (C - B) = \frac{a-b \text{ . Sin. } c}{a+b},$$

Durch

Durch Hülfe dieser eben gefundenen Gleichung findet man den Unterschied der beyden unbekannten Winkeln C und B, deren Summe bereits bekannt war, woraus man also jeden einzeln besonders herleiten kann.

§. 145.

Aufgabe. Aus dem bekannten Scheitelwinkel eines Dreyecks, der Summe seiner Seiten und dem Unterschiede der Abschnitte der Grundlinie, in welche das Perpendikel aus der Spitze auf dieselbe solche theilt, das Dreyeck selbst zu finden.

Auflösung I. Im Dreyeck ABC Fig. 69. ist die Summe der Seiten $BA + AC = a$, der Unterschied der Abschnitte der Grundlinie $BF - FC = d$ und $BAC = c$ bekannt. Wäre auch der Unterschied der Seiten bekannt, so ließe sich jede einzeln bestimmen und auf die Art das Dreyeck finden. Diesen Unterschied suche man zu bestimmen und nenne $AB - AC = x$, so hat man $AB = \frac{a+x}{2}$ und $AC = \frac{a-x}{2}$; man nenne endlich $BC = y$.

Nun ist $AB^2 = AF^2 + BF^2$ und $AC^2 = AF^2 + FC^2$, und folglich $AB^2 - AC^2 = AF^2 + BF^2 - AF^2 - FC^2 = BF^2 - FC^2$ und

$$(AB + AC) \cdot (AB - AC) = (BF + FC) \cdot (BF - FC).$$

Aber

Aber $AB + AC = a$, $AB - AC = x$,
$BF + FC = BC = y$ und $BF - FC = d$,
folglich $ax = dy$.

Im Dreyeck BAC ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \,.\, AC \,.\, \text{Cof. } c$$

(§. 103. F. 7) oder

$$y^2 = \left(\frac{a+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2-x^2}{2}\right) \,.\, \text{Cof. } c$$

$$y = \frac{ax}{d}$$

$$\frac{a^2x^2}{d^2} = \frac{a^2+2ax+x^2}{4} + \frac{a^2-2ax+x^2}{4} - \frac{a^2\,\text{Cof. } c}{2} + \frac{x^2\,\text{Cof. } c}{2}$$

$$\frac{2a^2x^2}{d^2} = \frac{a^2+x^2}{2} + \frac{a^2+x^2}{2} - a^2\,\text{Cof. } c + x^2\,\text{Cof. } c$$

$$= a^2 + x^2 - a^2\,\text{Cof. } c + \text{Cof. } c \,.\, x^2$$

$$= (1 + \text{Cof. } c)\,x^2 + (1 - \text{Cof. } c)\,a^2, \text{ und}$$

$$2a^2x^2 = d^2\,(1 + \text{Cof. } c)\,x^2 + d^2\,(1 - \text{Cof. } c)\,a^2$$

und

$$2a^2x^2 - d^2\,(1 + \text{Cof. } c)\,x^2 = d^2\,(1 - \text{Cof. } c)\,a^2$$

und

$$(2a^2 - d^2\,(1 + \text{Cof. } c))\,x^2 = d^2\,(1 - \text{Cof. } c)\,a^2$$

und

$$x^2 = \frac{d^2\,(1 - \text{Cof. } c)\,a^2}{2a^2 - d^2(1 + \text{Cof. } c)} \text{ und}$$

$$x = \frac{\sqrt{(d^2\,(1 - \text{Cof. } c)\,a^2)}}{\sqrt{(2a^2 - d^2(1 + \text{Cof. } c))}}.$$

Aber $1 + \text{Cof. } c = 2\,\text{Cof. } \frac{1}{2}c^2$ und $1 - \text{Cof. } c$
$= 2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}c^2$, also

$$x = \frac{\sqrt{(2a^2\,d^2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}c^2)}}{\sqrt{(2a^2 - 2d^2\,\text{Cof. } \frac{1}{2}c^2)}}$$

=

$$= \frac{\sqrt{(a^2 d^2 \text{Sin.} \frac{1}{2} c^2)}}{\sqrt{(a^2 - d^2 \text{Cof.} \frac{1}{2} c^2)}}$$

$$= \frac{a d \text{ Sin.} \frac{1}{2} c}{\sqrt{(a^2 - d^2 \text{Cof.} \frac{1}{2} c^2)}}.$$

Das Dreyeck ist also hier dadurch bestimmt worden, daß man nun aus der gegebenen Summe der beyden andern Seiten und deren nun gefundenen Unterschied die Seiten selbst findet.

Auflösung II. Man nenne den Winkel $ABC = z$, so ist $ACB = 180° - (c + z)$ und $\text{Sin. } c : y = \text{Sin. } (c + z) : AB$, und

$$AB = \frac{y \cdot \text{Sin. } (c+z)}{\text{Sin. } c}, \text{ und eben so}$$

$$AC = \frac{y \cdot \text{Sin. } z}{\text{Sin. } c}, \text{ mithin}$$

$$AB - AC = \frac{y \cdot \text{Sin. } (c+z)}{\text{Sin. } c} - \frac{y \cdot \text{Sin. } z}{\text{Sin. } c}$$

$$= \frac{y (\text{Sin. } (c+z) - \text{Sin. } z)}{\text{Sin. } c}. \text{ Aber}$$

$\text{Sin. } (c+z) - \text{Sin. } z = 2 \text{ Cof. } (z + \frac{1}{2} c) . \text{Sin. } \frac{1}{2} c$ (§. 75. F. 28) und

$\text{Sin. } c = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} c . \text{Cof. } \frac{1}{2} c$ (§. 75. F. 35), folglich

$$AB - AC = \frac{2 y \text{ Cof. } (z + \frac{1}{2} c) . \text{ Sin. } \frac{1}{2} c}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} c . \text{ Cof. } \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{y \text{ Cof. } (z + \frac{1}{2} c)}{\text{Cof. } \frac{1}{2} c}.$$

Aber $ax = dy$, oder

$a (AB - AC) = dy$ und

$$AB - AC = \frac{dy}{a}, \text{ folglich}$$

dy

$$\frac{dy}{a} = \frac{y \operatorname{Cof.}(z+\frac{1}{2}c)}{\operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c}$$

$$dy = \frac{a\,y \operatorname{Cof.}(z+\frac{1}{2}c)}{\operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c}$$

$$d = \frac{a \operatorname{Cof.}(z+\frac{1}{2}c)}{\operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c} \text{ und}$$

$$\frac{d \operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c}{a} = \operatorname{Cof.}(z+\tfrac{1}{2}c),$$

woraus man z findet.

Die Summe der beyden gegebenen Seiten oder $AB+AC = a$, also

$$a = \frac{(y \operatorname{Sin.}(c+z) + \operatorname{Sin.} z)}{\operatorname{Sin.} c.}$$

$$= \frac{2y \,.\, \operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z) \,.\, \operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c}{2 \operatorname{Sin.}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c} \text{ (§. 75. F. 27. 35)}$$

$$= \frac{y \,.\, \operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z)}{\operatorname{Sin.}\frac{1}{2}c} \text{ und}$$

$$a \,.\, \operatorname{Sin.}\tfrac{1}{2}c = y \,.\, \operatorname{Sin.}(\tfrac{1}{2}c+z), \text{ folglich}$$

$$\frac{a \,.\, \operatorname{Sin.}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z)} = y$$

Nun war aber oben $AB = \frac{y \,.\, \operatorname{Sin.}(c+z)}{\operatorname{Sin.} c}$ und

$$AC = \frac{y \,.\, \operatorname{Sin.} z}{\operatorname{Sin.} c}.$$

In diese Gleichungen bringe man den eben gefundenen Werth von y, so hat man

$$AB = \frac{a \operatorname{Sin.}\frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z)} \cdot \frac{\operatorname{Sin.}(c+z)}{\operatorname{Sin.} c}, \text{ aber}$$

$$\operatorname{Sin.} c = 2 \operatorname{Sin.}\tfrac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cof.}\tfrac{1}{2}c, \text{ folglich}$$

$$AB = \frac{a \operatorname{Sin.}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin.}(c+z)}{\operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z) \,.\, 2 \operatorname{Sin.}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{a \,.\, \operatorname{Sin.}(c+z)}{2 \operatorname{Cof.}\frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z)}.$$

Ferner $AC = \frac{a \operatorname{Sin.} \frac{1}{2}c}{\operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z)} \cdot \frac{\operatorname{Sin.} z}{\operatorname{Sin.} c}$

$= \frac{a \,.\, \operatorname{Sin} \frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin} z}{\operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z) \,.\, 2 \operatorname{Sin.} \frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Cof.} \frac{1}{2}c}$

$= \frac{a \,.\, \operatorname{Sin.} z}{2 \operatorname{Cof.} \frac{1}{2}c \,.\, \operatorname{Sin.}(\frac{1}{2}c+z)}$.

§. 146.

Aufgabe. Aus der Grundlinie und Höhe eines Dreyecks und dem Unterschiede der Winkel an der Grundlinie das Dreyeck zu finden.

Auflösung. Im Dreyeck ABC Fig. 70. nenne man $CB = a$, die Höhe $AE = h$ und den Unterschied der Winkel an der Grundlinie $ACB - ABC = c$. Die Summe dieser Winkel oder $ACB + ABC = x$ wird gesucht.

Es ist aber $ACB = \frac{1}{2}(x+c)$ und $ABC = \frac{1}{2}(x-c)$.

In den beyden rechtwinklichten Dreyecken CAE und BAE ist $CE = h \,.\, \operatorname{Cot.} \frac{1}{2}(x+c)$ und $BE = h \,.\, \operatorname{Cot.} \frac{1}{2}(x-c)$.

Aber $CE + EB = a$, folglich

$a = h(\operatorname{Cot.} \frac{1}{2}(x+c) + \operatorname{Cot.} \frac{1}{2}(x-c))$.

Aus §. 75. F. 32 ist $\operatorname{Cot.} y + \operatorname{Cot.} x = \frac{\operatorname{Sin.}(x+y)}{\operatorname{Sin.} x \,.\, \operatorname{Sin.} y}$. Man setze hier $y = \frac{1}{2}(x+c)$ und $x = \frac{1}{2}(x-c)$, so hat man

Cot.

$$\text{Cot.}\tfrac{1}{2}(x+c)+\text{Cot.}\tfrac{1}{2}(x-c) = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-e)\ .\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+c)}.$$

Aber

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-c)\ .\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+c) = \tfrac{1}{2}(\text{Cof. } c-\text{Cof. } x),$$

folglich

$$a = \frac{h\,\text{Sin. } x}{\tfrac{1}{2}(\text{Cof. } c-\text{Cof. } x)},$$

oder

$$\tfrac{1}{2}a\,\text{Cof. } c-\tfrac{1}{2}a\,\text{Cof. } x = h\,\text{Sin. } x,$$

und

$$\tfrac{1}{2}a\ .\ \text{Cof. } c = h\,\text{Sin. } x+\tfrac{1}{2}a\,\text{Cof. } x,$$

und

$$\frac{a\ .\ \text{Cof. } c}{2h} = \text{Sin. } x+\frac{a\,\text{Cof. } x}{2h}.$$

Man ſetze nun $\text{Tang. } m = \frac{a}{2h}$, d. h. man nehme einen ſo großen Winkel m an, daß deſſen Tangente dem Werthe von $\frac{a}{2h}$ in Zahlen gleich ſey, und bringe dieſen Werth von $\frac{a}{2h}$ in die Gleichung, ſo hat man

$$\text{Tang. } m\ .\ \text{Cof. } c = \text{Sin. } x+\text{Tang. } m\ .\ \text{Cof. } x$$

und

$$\text{Cof. } m\ .\ \text{Tang. } m\ .\ \text{Cof. } c = \text{Cof. } m\ .\ \text{Sin. } x+\text{Cof. } m\ .\ \text{Tang. } m\ .\ \text{Cof. } x,$$

aber

$$\text{Cof. } m\ .\ \text{Tang. } m = \text{Sin. } m \text{ (§. 73. F. 3)},$$

folglich

$$\text{Sin. } m\ .\ \text{Cof. } c = \text{Cof. } m\ .\ \text{Sin. } x+\text{Sin. } m\ .\ \text{Cof. } x, \text{ oder}$$

$$\text{Sin. } m\ .\ \text{Cof. } c = \text{Sin. } (m+x) \text{ (§. 75. F. 17)}.$$

Hieraus läßt sich also x bestimmen, und folglich ist nun ACB $= \frac{1}{2}(x+c)$ und ABC $= \frac{1}{2}(x-c)$ gefunden und das Dreyeck bestimmt.

§. 147.

Aufgabe. Aus der bekannten Grundlinie eines Dreyecks, dem Unterschiede der beyden Winkel an derselben, der Linie, welche von der Spitze des Dreyecks auf die Mitte der Grundlinie gefällt wird, das Dreyeck zu finden.

Auflösung. Im Dreyeck ABC Fig. 70. ist BC $= a$, AD $= b$ und ACB – ABC $= c$ bekannt.

In den beyden Dreyecken ADC und ADB, in welche das Dreyeck ABC durch AD getheilt worden, ist AD $= h$ und DC $=$ DB $= \frac{a}{2}$ bekannt. Kann man nun den Winkel ADC finden, so ist auch ADB bekannt, und folglich hat man in jedem der beyden Dreyecken 2 Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel, wodurch beyde Dreyecke und folglich auch ABC gegeben sind.

Man nenne daher ADC $= x$ und ziehe das Perpendikel AE, so ist

AE $= b \,.\, \text{Sin.}\, x$,

BE $= \frac{1}{2}a +$ DE $= \frac{1}{2}a + b \,.\, \text{Cos.}\, x$ und

CE

$CE = \frac{1}{2}a - b \,.\, Cof.\, x$, folglich

$$Tang.\, ABC = \frac{AE}{BE} = \frac{b \,.\, Sin.\, x}{\frac{1}{2}a + b \,.\, Cof.\, x} \text{ und}$$

$$Tang.\, ACB = \frac{AE}{EC} = \frac{b \,.\, Sin.\, x}{\frac{1}{2}a - b \,.\, Cof.\, x}.$$

Aber $Tang.\,(ACB - ABC) = Tang.\, c$

$$= \frac{Tang.\, ACB - Tang.\, ABC}{1 + Tang.\, ACB \,.\, Tang.\, ABC} \text{ (§. 75. F. 22),}$$

oder $Tang.\, c =$

$$\frac{b \,.\, Sin.\, x}{\frac{1}{2}a - b \,.\, Cof.\, x} - \frac{b \,.\, Sin.\, x}{\frac{1}{2}a + b \,.\, Cof.\, x} : 1 + \frac{b \,.\, Sin.\, x}{\frac{1}{2}a - b \,.\, Cof.\, x} \,.$$

$$\frac{b\ Sin.\ x}{\frac{1}{2}a + b\ Cof.\ x}$$

$$= \frac{b \,.\, Sin.\, x(\frac{1}{2}a + b \,.\, Cof.\, x) - b \,.\, Sin.\, x\,(\frac{1}{2}a - b \,.\, Cof.\, x)}{\frac{1}{4}a^2 - b^2 \,.\, Cof.\, x^2} :$$

$$1 + \frac{b^2 \,.\, Sin.\, x^2}{\frac{1}{4}a^2 - b^2\ Cof.\ x^2}$$

$$= \frac{b\ Sin.\ x\,(\frac{1}{2}a + b\ Cof.\ x) - b\ Sin.\ x\ (\frac{1}{2}a - b\ Cof.\ x)}{\frac{1}{4}a^2 - b^2 \,.\, Cof.\, x^2} :$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 - b^2\ Cof.\ x^2 + b^2\ Sin.\ x^2}{\frac{1}{4}a^2 - b^2 \,.\, Cof.\, x^2}$$

$$= \frac{b\ Sin.\ x\,(\frac{1}{2}a + b\ Cof.\ x) - b\ Sin.\ x\ (\frac{1}{2}a - b\ Cof.\ x)}{\frac{1}{4}a^2 - b^2 \,.\, Cof.\, x^2} \cdot$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 - b^2 \,.\, Cof.\, x^2}{\frac{1}{4}a^2 - b^2 \,.\, Cof.\, x^2 + b^2 \,.\, Sin.\, x^2}$$

$$= \frac{b \,.\, Sin.\, x\,(\frac{1}{2}a + b\ Cof.\ x) - b\ Sin.\ x\ (\frac{1}{2}a - b\ Cof.\ x)}{\frac{1}{4}a^2 - b^2 \,.\, Cof.\, x^2 + b^2 \,.\, Sin.\, x^2}$$

$$= \frac{b\ Sin.\ x\ (\frac{1}{2}a + b \,.\, Cof.\, x - \frac{1}{2}a + b\ Cof.\ x)}{\frac{1}{4}a^2 - b^2\ (Cof.\, x^2 - Sin.\ x^2)}$$

$$= \frac{2\,b^2\ Sin.\ x \,.\, Cof.\, x}{\frac{1}{4}a^2 - b^2\ (Cof.\, x^2 - Sin.\, x^2)}, \text{ aber}$$

$Sin.\, x = 2\, Sin.\, \frac{1}{2}x \,.\, Cof.\, \frac{1}{2}x$ (§. 75. F. 35) oder

Sin.

$\text{Sin. } 2x = 2\,\text{Sin. } x \,.\, \text{Cof. } x$, und

$\text{Cof. } 2x = \text{Cof. } x^2 - \text{Sin. } x^2$ (wenn man §. 75. F. 19 $x = y$ ſetzt); alſo

$$\text{Tang. } c = \frac{b^2\,\text{Sin. } 2x}{\frac{1}{4}a^2 - b^2\,\text{Cof. } 2x}.$$

Man ſetze ſtatt Tang. c den Ausdruck $\frac{\text{Sin. } x}{\text{Cof. } x}$, ſo hat man

$$\frac{\text{Sin. } c}{\text{Cof. } c} = \frac{b^2\,\text{Sin. } 2x}{\frac{1}{4}a^2 - b^2\,.\,\text{Cof. } 2x}, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2\,\text{Sin. } c - \text{Sin. } c\,.\,b^2\,.\,\text{Cof. } 2x = b^2\,.\,\text{Cof. } c\,.\,\text{Sin. } 2x, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2\,\text{Sin. } c = b^2\,.\,\text{Cof. } c\,.\,\text{Sin. } 2x + b^2\,.\,\text{Sin. } c\,.\,\text{Cof. } 2x$$
$$= b^2\,(\text{Cof. } c\,.\,\text{Sin. } 2x + \text{Sin. } c\,.\,\text{Cof. } 2x).$$

Aber

$$\text{Cof. } c\,.\,\text{Sin. } 2x + \text{Sin. } c\,.\,\text{Cof. } 2x = \text{Sin. } (2x + c), \text{ folglich}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2\,\text{Sin. } c = b^2\,\text{Sin. } (2x + c) \text{ und}$$

$$\frac{a^2\,\text{Sin. } c}{4\,b^2} = \text{Sin. } (2x + c).$$

Hieraus läßt ſich nun $2x + c$ und mithin auch x beſtimmen.

§. 148.

Aufgabe. In ein gegebenes Trapezium ein Quadrat zu beſchreiben.

Auflöſung. Das gegebene Viereck iſt ABCD Fig. 71., das einzubeſchreibende Quadrat MNPQ;

alle

alle Winkel des Vierecks sind bekannt, so wie auch die Seiten, gesucht wird die Seite des Quadrats $MN = x$ und der Winkel $BMN = y$. Man nenne $AB = a$ und $BC = b$.

Nun ist

$$AMQ = 90° - y;$$
$$AQM = 180° - A - AMQ$$
$$= 180° - A - 90° + y$$
$$= 90° - A + y$$
$$= 90° - (A - y)$$
$$BNM = 180° - (B + y)$$
$$CNP = 180° - 90° - BNM$$
$$= 90° - 180° + B + y$$
$$= B + y - 90°$$
$$CPN = 180° - C - CNP$$
$$= 180° - C - B - y + 90$$
$$= 270° - (B + C + y).$$

Im Dreyeck BNM hat man

$$\text{Sin. } MBN : MN = \text{Sin. } BNM : BM,$$

folglich

$$BM = \frac{MN \cdot \text{Sin. } BNM}{\text{Sin. } MBN} \text{ und}$$

$$= \frac{x \cdot \text{Sin. } (B + y)}{\text{Sin. } B}.$$

Ferner Sin. MBN : MN = Sin. BMN : BN,

folglich

$$BN = \frac{MN \cdot \text{Sin. } BMN}{\text{Sin. } MBN} \text{ und}$$

$$= \frac{x \cdot \text{Sin. } y}{\text{Sin. } B}.$$

Im Dreyeck MAQ hat man

Sin. MAQ : MQ = Sin. AQM : AM und

$$AM = \frac{MQ \cdot \text{Sin. } AQM}{\text{Sin. } MAQ}$$

$$= \frac{x \cdot \text{Cos. } (A-y)}{\text{Sin. } A}.$$

Endlich im Dreyeck NCP ist

Sin. NCP : NP = Sin. CPN : CN,

folglich

$$CN = \frac{NP \cdot \text{Sin. } CPN}{\text{Sin. } NCP}$$

$$= -\frac{x \cdot \text{Cos. } (B+C+y)}{\text{Sin. } C}.$$

Nun ist AM + BM = AB = a und

BN + NC = BC = b, folglich

$$a = \frac{x \cdot \text{Cos. } (A-y)}{\text{Sin. } A} + \frac{x \cdot \text{Sin. } (B+y)}{\text{Sin. } B} \text{ und}$$

$$b = \frac{x \cdot \text{Sin. } y}{\text{Sin. } B} - \frac{x \cdot \text{Cos. } (B+C+y)}{\text{Sin. } C}.$$

Aus der ersten Gleichung, wenn man sie mit Sin. A und Sin. B multiplicirt, wird

a Sin. A . Sin. B

= x Sin. B . Cos. (A − y) + x Sin. A . Sin. (B + y)

=

$$= x(\text{Sin. B . Cof. (A} - y) + \text{Sin. A . Sin. (B} + y))$$

und

$$\frac{a \text{ Sin. A . Sin. B}}{\text{Sin. B . Cof. (A} - y) + \text{Sin. A . Sin. (B} + y)} = x.$$

Aus der zweyten Gleichung wird auf eben die Weise, wenn man mit Sin. B und Sin. C multiplicirt,

$$b \text{ . Sin. B . Sin. C} = x \text{ . Sin. C . Sin. } y - x \text{ Sin. B . Cof. (B} + \text{C} + y)$$

$$= x(\text{Sin. C . Sin. } y - \text{Sin. B . Cof. (B} + \text{C} + y))$$

und

$$\frac{b \text{ . Sin. B . Sin. C}}{\text{Sin. C . Sin. } y - \text{Sin. B . Cof. (B} + \text{C} + y)} = x.$$

Man setze beyde Werthe von x gleich, so erhält man eine Gleichung, in der x eliminirt ist.

$$\frac{a \text{ Sin. A . Sin. B}}{\text{Sin. B . Sin. (A} - y) + \text{Sin. A . Sin. (B} + y)} = \frac{b \text{ . Sin. B . Sin. C}}{\text{Sin. C . Sin. } y - \text{Sin. B . Cof. (B} + \text{C} + y)}.$$

Durch die Multiplication mit den Nennern bekommt man

$$a \text{ Sin. A . Sin. B . Sin. C . Sin. } y - a \text{ Sin. A Sin. B}^2 \text{ . Cof. (B} + \text{C} + y)$$

$$= b \text{ Sin. B . Sin. C . Sin. B . Sin. (A} - y) + b \text{ Sin. B . Sin. C . Sin. A . Sin. (B} + y).$$

Man

Man dividire durch Sin. B, so bekommt man

$$a \text{ Sin. A . Sin. C . Sin. y} - a \text{ Sin. A . Sin. B . Cof. (B + C + y)}$$
$$= b \text{ . Sin. B . Sin. C . Sin. (A - y)} + b \text{ . Sin. C . Sin. A . Sin. (B + y).}$$

Man entwickele Cof. (B + C + y), Sin. (A - y), Sin. (B + y); dies giebt

$$\text{Cof. ((B + C) + y)} = \text{Cof. (B + C) . Cof. y} - \text{Sin. (B + C) . Sin. y}$$

(§. 75. F. 17), ferner

$$\text{Sin. (A - y)} = \text{Sin. A . Cof. y} - \text{Cof. A . Sin. y}$$

(§. 75. F. 18) und

$$\text{Sin. (B + y)} = \text{Sin. B . Cof. y} + \text{Cof. B . Sin. y}$$

(§. 75. F. 17).

Folglich

$$a \text{ . Sin. A . Sin. C . Sin. y} - a \text{ Sin. A . Sin. B . Cof. (B + C) . Cof. y} + a \text{ Sin. A . Sin. B . Sin. (B + C) Sin. y}$$
$$= b \text{ . Sin. B . Sin. C . Sin. A . Cof. y} - b \text{ . Sin. B . Sin. C . Cof. A . Cof. y} + b \text{ Sin. C . Sin. A . Sin. B . Sin. y} + b \text{ . Sin. C . Sin. A . Cof. B . Sin. y.}$$

Wenn man alle Glieder, die Sin. y enthalten, auf die eine, und alle Glieder, welche Cof. y enthalten, auf die andere Seite bringt, und Sin. y und Cof. y absondert, so hat man

Sin. y

Sin. y (a . Sin. A . Sin. C + a . Sin. A .
Sin. B . Sin. (B + C) − b . Sin. A . Sin. B
Sin. C − b . Sin. C . Sin. A . Cos. B)
= Cos. y (b . Sin. A . Sin. B . Sin. C + b .
Sin. B . Sin. C . Cos. A + a . Sin. A .
Sin. B . Cos. (B + C)).

Man dividire die Gleichung durch Cos. y, und durch den Factor von Sin. y, so hat man

$$\frac{\text{Sin. y}}{\text{Cos. y}} = \text{Tang. y} = \text{b . Sin. A . Sin. B .}$$
Sin. C + b . Sin. B . Sin. C . Cos. A + a
Sin. A . Sin. B . Cos. (B + C) : a . Sin. A .
Sin. C + a Sin. A . Sin. B . Sin. (B + C) − b .
Sin. A . Sin. B . Sin. C − b . Sin. C . Sin. A .
Cos. B.

Man dividire Zähler und Nenner durch Sin. A, so ist

Tang y =
b . Sin. B . Sin. C + b . Sin. B . Sin. C .
Cot. A + a Sin. B . Cos. (B + C) :
a Sin. C + a Sin. B . Sin. (B + C) − b .
Sin. B . Sin. C − b . Sin. C . Cos. B,

und wenn man im Zähler Sin. B absondert, so ist

$$\text{Tang y} = \frac{\text{Sin. B (b . Sin. C + b . Sin. C . Cot. A + a . Cos. (B + C))}}{\text{a Sin. C + a Sin. B . Sin. (B + C) − b . Sin. B . Sin. C − b . Sin. C . Cos. B.}}$$

Aus

Aus dieser Gleichung läßt sich Tang. y und y selbst bestimmen; bringt man diesen gefundenen Winkel y in eine der obigen Gleichungen, z. B. in $BM = \frac{x \cdot (\text{Sin. } B \pm y)}{\text{Sin. } B}$, so findet man daraus BM. Man lege also durch den Punct B unter einem Winkel $= y$, eine gerade Linie MN, so ist diese die Seite $= x$ des gesuchten Quadrats, welches man nun vollendet.

§. 149.

Aufgabe. Die vier Seiten eines Vierecks und die beyden Diagonalen desselben sind gegeben; man soll die Abschnitte dieser Diagonalen finden.

Auflösung. Die vier gegebenen Seiten des Vierecks und die beyden gegebenen Diagonalen sind Fig. 73. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ und $AC = f$, $BD = g$, endlich $AE = x$, $BE = y$.

Im Dreyeck ABD ist

$$\text{Cos. } ABD = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{a^2 + g^2 - d^2}{2ag}$$

(§. 103. F. 8.).

Im Dreyeck CBD ist

$$\text{Cos. } CBD = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC \cdot BD} = \frac{b^2 + g^2 - c^2}{2bg}.$$

Im

Im Dreyeck ABC ist

$$\text{Cos. ACB} = \frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\,.\,AC} = \frac{b^2+f^2-a^2}{2bf}.$$

Im Dreyeck ADC ist

$$\text{Cos. ACD} = \frac{CD^2+AC^2-AD^2}{2CD\,.\,AC} = \frac{c^2+f^2-d^2}{2cf}.$$

Ferner geben die drey Dreyecke AEB, BEC und CED folgende vier Gleichungen:

$$AE^2 = AB^2+BE^2-2AB\,.\,BE\,.\,\text{Cos. ABD}$$

(§. 103. F. 7)

$$CE^2 = BC^2+BE^2-2BC\,.\,BE\,.\,\text{Cos. CBD}$$

$$BE^2 = BC^2+CE^2-2BC\,.\,CE\,.\,\text{Cos. ACB}$$

$$DE^2 = CD^2+CE^2-2CD\,.\,CE\,.\,\text{Cos. ACD.}$$

Wenn man nun die Linien mit ihren kleinen Buchstaben bezeichnet und statt der Cosinusse ihre Werthe setzt, so hat man

$$x^2 = a^2+y^2-2ay\,.\,\frac{a^2+g^2-d^2}{2ag}$$

$$= a^2+y^2-y\,.\,\frac{a^2+g^2+d^2}{g}$$

$$(f-x)^2 = b^2+y^2-2by\,.\,\frac{b^2+g^2-c^2}{2bg}$$

$$= b^2+y^2-y\,.\,\frac{b^2+g^2-c^2}{g}$$

$$y^2 = b^2+(f-x)^2-2b(f-x)\,.\,\frac{b^2+f^2-a^2}{2bf}$$

$$= b^2+(f-x)^2-(f-x)\,.\,\frac{b^2+f^2-a^2}{f}$$

$$(g-y)^2 = c^2+(f-x)^2-2c(f-x)\,.\,\frac{c^2+f^2-d^2}{2cf}$$

$$= c^2+(f-x)^2-(f-x)\,.\,\frac{c^2+f^2-d^2}{f}.$$

Man

Man subtrahire die erste Gleichung von der zweyten und die dritte von der vierten, so bekommt man

$$f^2-2fx = b^2-a^2+\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{g}\,.\,y \text{ und}$$

$$g^2-2gy = c^2-b^2-\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{f}(f-x)$$

und durch die Elimination von y

$$x = \frac{f(g^2+a^2-d^2)\,.\,(a^2-b^2+c^2-d^2)-2fg^2(f^2+a^2-b^2)}{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2-4f^2g^2}.$$

Auf eben die Art findet man einen Werth für BE, und wenn man x von AC und y von BD subtrahirt, auch für CE und ED.

§. 150.

Aufgabe. Eines Vierecks vier Seiten sind gegeben und zwey gegenüberliegende Winkel zwey rechten Winkeln gleich; man sucht den Inhalt desselben.

Auflösung. In dem Viereck ABCD Fig. 73 sind $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $AD = d$ gegeben; ferner $ABC+ADC = 2R$. Der Winkel $ADC = x$ wird gesucht. Man ziehe die Diagonale AC.

Im Dreyeck ADC ist

$AC^2 = c^2+d^2-2cd\,.\,\text{Cos.}x$ (§. 103. F. 7).

Im

Im Dreyeck ABC ist ebenfalls

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \text{Cos. } x.$$

Es ist nämlich Cos. ABC $=$ Cos. $(180° - x)$

$= -$ Cos x, folglich wird der letzte Theil positiv.

Beyde Werthe von AC^2 setze man gleich, so hat man

$$c^2 + d^2 - 2cd \text{ Cos. } x = a^2 + b^2 + 2ab \text{ Cos. } x, \text{ und}$$

$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = 2ab \text{Cos. } x + 2cd \text{Cos. } x, \text{ und}$$

$$c^2 + d^2 - a^2 - b^2 = (2ab + 2cd) \text{ Cos. } x, \text{ folglich}$$

$$\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2ab + 2cd} = \text{Cos. } x.$$

Man addire auf beyden Seiten 1, so hat man

$$\frac{c^2 + 2cd + d^2 - a^2 + 2ab - b^2}{2ab + 2cd} = 1 + \text{Cos. } x, \text{ oder}$$

$$\frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{2ab + 2cd} = 1 + \text{Cos. } x, \text{ oder}$$

$$\frac{(c+d+a-b) \cdot (c+d-a+b)}{2ab + 2cd} = 1 + \text{Cos. } x.$$

Ferner $1 - \text{Cos. } x = 1 - \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2ab + 2cd}$

$$= \frac{2ab + 2cd - c^2 - d^2 + a^2 + b^2}{2ab + 2cd}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2}{2ab + 2cd}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2ab + 2cd}$$

$$= \frac{(a+b+c-d) \cdot (a+b-c+d)}{2ab + 2cd}.$$

Durch

Durch die Multiplication dieser beyden Gleichungen erhält man

$$(1 - \text{Cof. } x) \cdot (1 + \text{Cof. } x)$$
$$= 1 - \text{Cof. } x^2 = \text{Sin. } x^2$$
$$= \frac{(a+b+c-d).(a+b-c+d).(c+d+a-b).(c+d-a+b)}{(2ab+2cd)^2}.$$

Man setze der Kürze wegen statt des Zählers M, so ist

$$\text{Sin. } x^2 = \frac{M}{(2ab+2cd)^2} \text{ und}$$

$$\text{Sin. } x = \frac{\sqrt{M}}{2ab+2cd}.$$

Der Inhalt des Dreyecks ADC ist

$$= \frac{cd \cdot \text{Sin. } x}{2} \text{ und}$$

der Inhalt des Dreyecks ABC

$$= \frac{ab \cdot \text{Sin.}(180° - x)}{2}$$
$$= \frac{ab \cdot \text{Sin. } x}{2}.$$

Aber $ABCD = \triangle ADC + \triangle ABC =$ $\frac{(ab+cd)\,\text{Sin. } x}{2}$. Nun ist aber

$$\text{Sin. } x = \frac{\sqrt{M}}{2ab+2cd} =$$
$$\frac{\sqrt{(a+b+c-d).(a+b+d-c).(a+d+c-b).(b+c+d-a)}}{2(ab+cd)},$$

also $ABCD = \frac{(ab+cd)\,\text{Sin. } x}{2} = \frac{(ab+cd).}{2}$
$$\frac{\sqrt{(a+b+c-d).(a+b+d-c).(a+d+c-b).(b+c+d-a)}}{2(ab+cd)} =$$
$$\frac{\sqrt{(a+b+c-d).(a+b+d-c).(a+d+c-b).(b+c+d-a)}}{4}.$$

Diese Formel giebt zur Berechnung solcher Vierecke folgende Regeln:

1) Man addire jede drey Seiten des Vierecks und subtrahire davon die vierte;

2) diese vier Größen multiplicire man mit einander;

3) ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel;

4) dividire die Wurzel durch 4.

§. 151.

Aufgabe. Die vier Seiten eines Vierecks sind gegeben und zwey einander gegenüberliegende Winkel gleich; man soll den Inhalt des Vierecks finden.

Auflösung. Im Viereck ABCD Fig. 74. sind $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ gegeben; man nenne den unbekannten Winkel $BAD = BCD = x$ und den gesuchten Inhalt des Vierecks $= q$.

Im Dreyeck BAD ist

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \text{Cos.}x.$$

Im Dreyeck BCD ist

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \text{Cos.}x.$$

Man setze beyde Werthe von BD^2 gleich, so ist

$$a^2 + d^2 - 2ad\,Cof.x \equiv b^2 + c^2 - 2bc\,Cof.x,$$ folglich

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \equiv 2ad\,Cof.x - 2bc\,Cof.x,$$ und

$$\equiv (2ad - 2bc)\,Cof.x$$ und

$$\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad-2bc} \equiv Cof.x$$

$$1 + Cof.x \equiv 1 + \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad-2bc}$$

$$\equiv \frac{2ad-2bc+a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad-2bc}$$

$$\equiv \frac{a^2+2ad+d^2-b^2-2bc-c2}{2ad-2bc}$$

$$\equiv \frac{(a+d)^2-(b+c)^2}{2ad-2bc}$$

$$\equiv \frac{(a+b+c+d)\,.\,(a-b-c+d)}{2ad-2bc}$$

$$1 - Cof.x \equiv 1 - \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad-2bc}$$

$$\equiv \frac{2ad-2bc-a^2-d^2+b^2+c^2}{2ad-2bc}$$

$$\equiv \frac{(b-c)^2-(a-d)^2}{2ad-2bc}$$

$$\equiv \frac{(a+b-c-d)\,.\,(b+d-a-c)}{2ad-2bc}.$$

Die Multiplication dieser beyden Gleichungen giebt

$$(1 + Cof\,x)\,.\,(1 - Cof.x \equiv 1 - Cof.x^2 \equiv Sin.x^2 \equiv$$

$$\frac{(a+b+c+d).(a+b-c-d).(a+d-b-c).(b+d-a-c)}{(2ad-2bc)^2}.$$

Man

Man nenne den Zähler dieses Bruchs M, so ist

$$\text{Sin. } x^2 = \frac{M}{(2ad-2bc)^2} \text{ und}$$

$$\text{Sin. } x = \frac{\sqrt{M}}{2ad-2bc} = \frac{\sqrt{M}}{2(ad-bc)}.$$

Nun ist $\triangle BAD = \frac{ad \,.\, \text{Cof. } x}{2}$ und

$$\triangle BCD = \frac{bc \,.\, \text{Cof. } x}{2}, \text{ also}$$

Viereck $ABCD = q = \triangle BAD + \triangle BCD$

$$= \frac{(ad+bc)}{2} \text{ Cof. } x = \frac{(ad+bc)}{2} \cdot \frac{\sqrt{M}}{2(ad-bc)}$$

$$= \frac{ad+bc}{4(ad-bc)} \cdot \sqrt{M} = \frac{ad+bc}{4(ad-bc)} \cdot$$

$$(a+b+c+d) \,.\, (a+b-c-d) \,.\, (a+d-b-c) \,.$$

$$(b+d-a-c).$$

§. 152.

Aufgabe. Den Inhalt eines regulären Polygons oder Vielecks aus der Anzahl seiner Seiten und dem Halbmesser des um und in ihm beschriebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Es sey AB Fig. 75. die Seite eines regulären Vielecks von n Seiten, der Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises $CA = CB = R$, der Halbmesser des in ihm beschriebenen Kreises $CN = r$. Der Inhalt des Vielecks heiße $= q$.

Bekanntlich findet man den Centriwinkel eines regulären Polygons, wenn man 360° durch die Anzahl der Seiten dividirt; also $ACB = \frac{360°}{n}$ und folglich $\triangle ACB = \frac{1}{2} R^2 \cdot \text{Sin.} \frac{360°}{n}$ (§. 29.), folglich

Polygon oder $q = \frac{1}{2} n R^2 \cdot \text{Sin.} \frac{360°}{n}$.

Weil $ACB = \frac{360°}{n}$, so ist

$$ACN = \frac{1}{2} ACB = \frac{180°}{n},$$

$$AN = r \cdot \text{Tang.} \frac{180°}{n}$$

$$2AN = AB = 2r \cdot \text{Tang.} \frac{180°}{n}.$$

Aber $\triangle ACB = \frac{AB \cdot CN}{2}$, folglich

$$\triangle ACB = r^2 \text{ Tang.} \frac{180°}{n} \text{ und}$$

$$\text{Polygon} = n \cdot \triangle ACB = n r^2 \cdot \text{Tang.} \frac{180°}{n}.$$

Fünf=

Fünftes Kapitel.

Die sphärische Trigonometrie.

Einleitung.

§. 153.

Bevor wir zu den Lehren der sphärischen Trigonometrie übergehen, wollen wir erst einige Lehrsätze der körperlichen oder Stereometrie ihrer Wichtigkeit wegen hier in Erinnerung bringen.

1) Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist eine Fläche von der Beschaffenheit, daß alle in derselben gezogene gerade Linien ganz in derselben liegen.

2) Eine gerade Linie ist auf einer ebenen Fläche senkrecht, wenn sie mit allen geraden Linien, welche man in der Ebene durch den Punct ziehet, wo die gerade Linie auf der Fläche steht, rechte Winkel macht. Im 223sten §. der körperlichen Geometrie ist erwiesen worden, daß, wenn eine gerade Linie im Durchschnittspuncte zweyer in der Ebene liegenden geraden Linien senkrecht steht, sie alsdann auf jeder andern durch denselben Punct gezo-

zogenen geraden Linie, und mithin auch auf der Ebene senkrecht stehe.

3) Eine Ebene durch diese senkrechte Linie gelegt, steht auf der andern Ebene senkrecht.

4) Die Neigung einer geraden Linie CD Fig. 76. gegen eine Ebene wird durch den Winkel DCE bestimmt, welcher entsteht, wenn man von dem Puncte D die senkrechte Linie DE auf die Ebene AB und CE ziehet.

5) Zwey Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie.

6) Die Neigung einer Ebene gegen eine andere wird durch den Winkel bestimmt, welcher entsteht, wenn von einem Puncte der Durchschnittslinie beyder Ebenen gerade Linien gezogen werden, die auf gedachter Durchschnittslinie senkrecht stehen.

7) Ein körperlicher Winkel wird von wenigstens drey ebenen Winkeln, welche alle in verschiedenen Ebenen liegen und in eine gemeinschaftliche Spitze zusammentreffen, eingeschlossen. Die Ecken aller scharfkantigen Körper sind körperliche Winkel. Gleich große körperliche Winkel sind diejenigen, welche von gleich vielen und nach der Ordnung gleich großen ebenen Winkeln eingeschlossen werden.

§. 154.

Von drey ebenen Winkeln Fig. 77. BAC, CAD und DAB, welche einen körperlichen Winkel einschließen, sind jede zwey größer als der dritte.

1) Wären die drey Winkel BAC, CAD und DAB von gleicher Größe, so wäre die Sache an sich klar.

2) Sind die Winkel aber ungleich, und BAC $>$ BAD, so mache man BAE $=$ BAD und AE $=$ AD. Man ziehe nun die Linie BC durch E und DB und DC.

Da nun BAE $=$ BAD, AE $=$ AD und AB $=$ AB, so ist $\triangle$ BAD $=$ $\triangle$ BAE und BD $=$ BE. Nun ist aber in jedem Dreyeck die Summe zweyer Seiten größer als die dritte, oder BD $+$ DC $>$ BE $+$ EC und weil BD $=$ BE, so ist DC $>$ EC. Weil nun ferner AD $=$ AE und AC $=$ AC, so ist der Winkel

DAC $>$ EAC, aber

BAD $=$ BAE, folglich, wenn man addirt,

DAC $+$ BAD $>$ EAC $+$ BAE, aber

EAC $+$ BAE $=$ BAC, folglich

DAC $+$ BAD $>$ BAC.

Eben so läßt sich der Beweis führen, daß DAC + BAC ▷ BAD und BAD + BAC ▷ DAC ist.

§. 155.

Jeder körperliche Winkel A Fig. 77. wird von den ebnen Winkeln BAC, CAD und DAB eingeschlossen, deren Summe kleiner als vier rechte Winkel ist.

Der körperliche Winkel B ist von den drey ebenen Winkeln CBA, ABD und DBC eingeschlossen und CBA + ABD ▷ DBC, so wie aus eben den Gründen beym körperlichen Winkel C BCA + ACD ▷ DCB und beym körperlichen Winkel D CDA + ADB ▷ BDC ist. Oder

CBA + ABD ▷ DBC
BCA + ACD ▷ DCB
CDA + ADB ▷ BDC, also, wenn man addirt,

CBA + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB ▷ DBC + DCB + BDC, aber

DBC + DCB + BDC = 2R, also

CBA + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB ▷ 2R

Aber genannte sechs Winkel nebst BAC + CAD + DAB = 6R, folglich BAC + CAD + DAB ◁ 4R.

∠ 4 R. Auf eine ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn der körperliche Winkel von mehr als 3 ebenen Winkeln eingeschlossen ist.

§. 156.

1) Wenn eine Kugel von einer Ebene durchschnitten wird, so ist der Schnitt ein Kreis.

2) Ein durch den Mittelpunct der Kugel gehender Schnitt ist größer als jeder andere, der nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht.

3) Ein grösster Kreis auf der Kugeloberfläche ist ein solcher, dessen Ebene durch den Mittelpunct der Kugel geht.

4) Ein auf der Ebene eines grösten Kreises senkrecht stehender Durchmesser der Kugel heißt derselben Achse.

5) Pole eines grösten Kreises der Kugel heißen auf der Oberfläche der Kugel die Endpuncte eben gedachten Durchmessers, welche also von dem grösten Kreise 90° entfernt sind.

6) Wenn ein grösster Kreis durch die Pole eines andern grösten Kreises geht, so steht er auf demselben senkrecht.

Die Beweise dieser Lehrsätze, die hier nur als Lehnsätze angeführt werden, sehe man in der Stereometrie nach.

Wenn drey gröſte Kreiſe auf der Oberfläche einer Kugel ſich ſchneiden, ſo bilden ſie ein Kugel- oder ſphäriſches Dreyeck. Die drey Bogen dieſer gröſten Kreiſe heißen die Seiten des ſphäriſchen Dreyecks und die von denſelben gebildeten Winkel die ſphäriſchen Winkel deſſelben.

Da die Seiten des ſphäriſchen Dreyecks oder AC, AB und BC Fig. 78. die Maaße der Winkel am Mittelpunct der Kugel D ſind, ſo kommt bey dieſen Dreyecken nichts als Gradbeſtimmungen vor; man gebraucht alſo hier nur trigonometriſche Linien und deren Logarithmen, mithin keine gemeine Zahlen und die Logarithmen derſelben, wie in der ebenen Trigonometrie.

§. 157.

Es ſey D Fig. 78. der Mittelpunct der Kugel, von deren Oberfläche die Fläche des ſphäriſchen Dreyecks ABC ein Stück iſt, und man ziehe von A, B und C die Halbmeſſer AD, BD und CD, ſo ſchließen die drey Ebenen ADC, BDA und BDC am Mittelpunct der Kugel einen körperlichen Winkel D ein. Da nun, wie geſagt, die Seiten des ſphäriſchen Dreyecks ABC, nämlich AB, BC und AC, die Maaße der Winkel ADB, BDC und ADC ſind, ſo gelten eben die Sätze,

welche

welche §. 154. 155. von den ebenen einen körperlichen Winkel einschließenden Winkeln vorgetragen sind, auch von den Seiten des sphärischen Dreyecks.

Also:

1) In einem jeden Kugeldreyeck ist die Summe zweyer Seiten größer als die dritte.

2) Die Summe aller drey Seiten desselben beträgt weniger als 4 R oder 360° oder als der ganze Kreis.

§. 158.

Aufgabe. Von einem Puncte C auf die Ebene HI eine senkrechte Linie herabzufällen. Fig. 79.

Auflösung. 1) Man ziehe in der Ebene HI nach Belieben die gerade Linie DE und darauf CA senkrecht, so daß DAC = EAC = R ist.

2) Man ziehe durch A die Linie AB senkrecht auf DE.

3) Man lasse CB senkrecht herabfallen auf AB, so daß CBA = R ist, so wird CB auf der Ebene senkrecht stehen.

Beweis. Man ziehe durch B die Linie FG mit DE parallel, so steht DE senkrecht auf CA und BA (vermöge der Construction), also

auch

auch auf der Ebene CAB und folglich auch FG auf eben dieser Ebene CAB, weil DE und FG parallel sind. Es ist also CBG = R, aber auch CBA = R, mithin CB senkrecht auf BA und BG, und also auch auf der Ebene HI. §. 153. Num. 2.

§. 159.

Aus einem Puncte C Fig. 79. lassen sich nicht zwey senkrechte Linien CB und CA auf eine Ebene herabfällen, weil es sonst, wenn man die Linie AB ziehet, in dem Dreyecke CAB zwey rechte Winkel gäbe, nämlich CAB und CBA, welches unmöglich.

§. 160.

Wenn aus C Fig. 79. eine senkrechte Linie auf die Ebene HI und eine zweyte senkrechte Linie auf DE in dieser Ebene fällt und man ziehet AB, so ist diese auch auf DE senkrecht.

Beweis. Wäre AB nicht senkrecht auf DE, so errichte man in A eine senkrechte Linie auf DE etwa AK, so wird auch CK, mithin CB und CK auf der Ebene HI senkrecht seyn, welches §. 159. widerspricht.

§. 161.

Wenn man von D Fig. 80. die senkrechte Linie DF auf die Ebene ACB und DE senk-

recht

recht auf CA, so wie DG senkrecht auf CB, und alsdann die Linien EF und GF ziehet, so ist auch EF senkrecht auf CA und GF senkrecht auf CB. Der Beweis folgt aus §. 160.

Da also DE auf CA in der Ebene ACD und FE auf CA in der Ebene ACB senkrecht steht, so drückt der Winkel DEF den Neigungswinkel beyder Ebenen ACD und ACB aus. Dasselbe gilt vom Winkel DGF in Rücksicht der beyden Ebenen DCB und ACB. Es ist also DEF = A und DGF = B.

Ist DGF = R oder steht die Ebene DCB auf der Ebene ACB senkrecht §. 153. N. 3., so ist das sphärische Dreyeck bey B rechtwinklicht. DB heißt alsdann das Perpendikel des Dreyecks, AB die Grundlinie oder das andere Perpendikel, und DA die Hypotenuse desselben.

Auch DEF kann = R seyn und also das Dreyeck DAB bey A und B rechte Winkel haben, wo alsdann D der Pol des Kreisbogens AB ist. Da ebenfalls der Winkel am Pol D ein rechter, ja ein stumpfer seyn kann, so können in einem Kugeldreyeck mehr als drey rechte Winkel seyn.

Nur von solchen sphärischen Dreyecken wird in der Folge die Rede seyn, deren Seiten jede nämlich kleiner als 180° sind.

§. 162.

§. 162.

Die sphärische Trigonometrie lehrt aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen oder Kugeldreyecks die übrigen durch Rechnung finden.

Von rechtwinklichten sphärischen Dreyecken.

§. 163.

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck ABC Fig. 78. verhält sich der Halbmesser zum Sinus der Hypotenuse CA, wie der Sinus eines spitzen Winkels A zum Sinus der gegenüberliegenden Seite CB oder r : Sin. CA = Sin. A : Sin. CB.

Beweis. In dem bey F rechtwinklichten geradlinichten Dreyeck CEF ist CE : CF = r : Sin. E oder Sin. A. Aber CE = Sin. CA und CF = Sin. CB, folglich Sin. CA : Sin. CB = r : Sin. A oder r : Sin. CA = Sin. A : Sin. CB.

§. 164.

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck CAB Fig. 78. verhält sich der Halbmesser zum Sinus des einen Perpendikels, wie

wie die Tangente eines spitzen Winkels zur Tangente des gegenüberliegenden Perpendikels, oder r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB.

Beweis. In dem rechtwinklichten Dreyeck CFD ist

DF : FC = r : Tang. CB. Ferner im rechtwinklichten Dreyeck CEF

CF : FE = Tang. A : r, also

DF : FE = Tang. A : Tang. CB. Aber in dem bey E rechtwinklichten Dreyeck DEF ist

DF : FE = r : Sin. AB, also

r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB.

§. 165.

Die in einem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke, dessen rechter Winkel immer gegeben ist, noch vorkommenden gegebenen Stücke, aus welchen ein drittes unbekanntes Stück gefunden werden soll, mögen nebst dem gesuchten Stücke Glieder der Frage heißen.

Diese können folgende seyn:

1) Drey Seiten.
2) Zwey Winkel und die Hypotenuse.
3) Zwey Winkel und ein Perpendikel.
4) Zwey Perpendikel und ein Winkel.

5) Hypotenuse, ein Perpendikel und ein anliegender Winkel.

6) Hypotenuse, ein Perpendikel und ein gegenüberliegender Winkel.

§. 166.

§. 163. lehrt, aus der Hypotenuse und einem Winkel das gegenüberliegende Perpendikel zu finden; die Glieder der Frage sind also: Hypotenuse, Perpendikel und gegenüberliegender Winkel. Die Proportion r : Sin. CA = Sin. A : Sin. CB lößt also den 6ten Fall auf.

In §. 164. sind die Glieder der Frage zwey Perpendikel und ein Winkel; folglich lößt die Proportion r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB den 4ten Fall auf.

Eigentlich beantwortet jede dieser Proportion 3 Fragen, weil man jedes Glied der Frage oder der Proportion (außer r) zum gesuchten machen kann.

Nämlich aus der Proportion r : Sin. CA = Sin. A : Sin. CB wird

Sin. CA : r = Sin. CB : Sin. A und

Sin. A : Sin. CB = r : Sin. CA.

Aus

Aus der Proportion r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB wird

Sin. AB : r = Tang. CB : Tang. A und

Tang. A : Tang. CB = r : Sin. AB.

§. 167.

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke ABC Fig. 81. verhält sich der Halbmesser zum Cosinus des einen Perpendikels, wie der Cosinus des andern Perpendikels zum Cosinus der Hypotenuse oder kürzer ausgedrückt.

1) r : Cos. CB = Cos. AB : Cos. CA.

2) r : Cos. CB = Sin. C : Cos. A.

3) r : Cos. A = Cot. AB : Cot. CA.

4) r : Cos. CA = Tang. C : Tang. A.

Beweis. Man verlängere die Seiten des Dreyecks ABC, nämlich AC und AB, bis AE und AD Quadranten werden, so sind bey E und D rechte Winkel; man verlängere ferner die Bogen CB und ED, bis sie sich in F als dem Pole des Kreises ABD schneiden, so sind auch FD und FB Quadranten, folglich CE, BD oder F, FC und FE die Complemente oder Ergänzungen von AC, AB, CB und ED.

Nun ist §. 163. 164. im rechtwinklichten Dreyeck EFC

r : Sin. FC = Sin. F : Sin. CE und
r : Sin. FC = Sin. C : Sin. FE; ferner
r : Sin. FE = Tang. F : Tang. CE und
r : Sin. CE = Tang. C : Tang. FE.

In diese Proportionen setze man, weil Sinus und Tangente eines Bogens dem Cosinus und der Cotangente von dessen Ergänzungsbogen zu 90° gleich ist, statt Sin. FC, Sin. F, Sin. CE, die Cosinus von deren Ergänzungen zu 90° oder Sin. FC = Cos. CB, Sin. F = Cos. AB und Sin. CE = Cos. CA, so wird aus der ersten Proportion folgende:

r : Cos. CB = Cos. AB : Cos. CA.

Auf die nämliche wird aus der zweyten Proportion folgende:

r : Cos. CB = Sin. C : Cos. A.

Die dritte und vierte Proportion geben
r : Cos. A = Cot. AB : Cot. AC und
r : Cos. AC = Tang. C : Cot. A.

§. 168.

In der ebenen Trigonometrie §. 7. Num. 5. ist erwiesen worden, daß die Cotangente die dritte Proportional-Linie zur Tangente und dem Radius ist, oder Tang. x : r = r : Cot. x, mithin $\text{Cot. } x = \frac{r^2}{\text{Tang. } x}$ oder, r = 1 gesetzt, $\text{Cot. } x = \frac{1}{\text{Tang. } x}$ und $\text{Tang. } x = \frac{1}{\text{Cot. } x}$.

Aus der Proportion §. 164.

r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB wird also

$r : \text{Sin. } AB = \frac{1}{\text{Cot. } A} : \frac{1}{\text{Cot. } CB}$ und, wenn man mit den Nennern multiplicirt,

r : Sin. AB = Cot. CB : Cot. A.

Auf die nämliche Art werden aus den Proportionen

r : Cos. A = Cot. AB : Cot. AC und

r : Cos. AC = Tang. C : Cot. A folgende

r : Cos. A = Tang. AC : Tang. AB und

r : Cos. AC = Tang. A : Cot. C.

§. 169.

Die gefundenen 9 Proportionen, oder eigentlich die ersten 6, denn die 3 letzten sind nur Modificationen von b, e und f, nämlich:

a, r : Sin. CA = Sin. A : Sin. CB
b, r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB
c, r : Cos. CB = Cos. AB : Cos. CA
d, r : Cos CB = Sin. C : Cos. A
e, r : Cos. A = Cot. AB : Cot. CA
f, r : Cos. CA = Tang. C : Cot. A
g, r : Sin. AB = Cot. CB : Cot. A
h, r : Cos. A = Tang. AC : Tang. AB
i, r : Cos. AC = Tang. A : Cot. C

thun allen bey der Auflösung rechtwinklichter sphäriscber Dreyecke vorkommenden Fragen ein Genüge, wie so erhellet: nämlich die Proportion a ist der sechste Fall §. 165.; Proportion b der vierte; Proportion c der erste; Proportion d der dritte; Proportion e der fünfte und Proportion f der zweyte Fall.

§. 170.

Nachfolgende Tafel enthält alle Fälle, die bey der Auflösung rechtwinklichter sphärischer Dreyecke vorkommen können. Man hat also, wenn man an einem Dreyecke etwas aufzulösen hat, nur nöthig, dasselbe so mit Buchstaben zu bezeichnen, als die 81ste Figur zeigt, und in der ersten Kolonne das Gegebene und in der zweyten das Gesuchte aufzusuchen, so findet man daneben in der dritten Kolonne die Proportion, die den vorliegenden Fall auf-

auflößt. Es sey z. B. im Dreyeck CAB gegeben CA und ein anliegender Winkel A oder C, und das dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Perpendikel solle gefunden werden: so ist es die fünfte Proportion, welche die vorliegende Frage beantwortet.

Fall	Gegeben	Gesucht	Proportion
1	AB, BC	AC	r : Cof. AB = Cof. CB : Cof. AC
2	AB, BC	A	r : Sin. AB = Cot. CB : Cot. A
3	CA, C	A	r : Cof. CA = Tang. C : Cot. A
4	CA, C	CB	r : Tang. CA = Cof. C. : Tang. CB
5	CA, A	CB	r : Sin. CA = Sin. A : Sin. CB
6	AB, A	AC	r : Cof. A = Cot. BA : Cot. AC
7	AB, A	C	r : Cof. AB = Sin. A : Cof. C
8	AB, A	CB	r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB

Fall	Gegeben	Gesucht	Proportion	aus
9	BC, A	AB	r : Cot. A = Tang. BC : Sin. AB, weil Cot. A = $\frac{1}{\text{Tang. A}}$	h
10	CB, A	AC	Sin. A : Sin. CB = r : Sin. AC	a
11	CB, A	C	Cos. CB : r = Cos. A : Sin. C	d
12	AB, AC	A	r : Cot. AC = Tang. AB : Cos. A, weil Tang. AC = $\frac{1}{\text{Cot. AC}}$	h
13	CB, AC	A	Sin. AC : r = Sin. CB : Sin. A	a
14	CB, AC	AB	Cos. CB : r = Cos. AC : Cos. AB	c
15	A, C	AC	r : Cot. C = Cot. A : Cos. AC, weil Tang. A = $\frac{1}{\text{Cot. A}}$	i
16	A, C	BC	Sin. C : r = Cos. A : Cos. BC.	d

§. 171.

215

§. 171.

Daß aber obige Tafel alle mögliche Fälle enthalte, die bey rechtwinklichten Dreyecken vorkommen können, wird man leicht einsehen, wenn man erwägt, daß sich aus Num. 1. §. 165. zwey Fälle, nämlich 14 und 1 (denn welches Perpendikel gesucht wird, ist gleichgültig); aus Num. 2. ebenfalls 2 Fälle, nämlich 15 und 3; aus Num. 3. drey Fälle, nämlich 16, 7, 11; aus Num. 4. eben so viel, nämlich 2, 8, 9; imgleichen aus Num. 5. gleichfalls 3 Fälle, nämlich 12, 4, 6, und endlich aus Num. 6. auch 3 Fälle, nämlich 13, 5, 10 herleiten lassen.

§. 172.

Wir haben hier solche rechtwinklichte Dreyecke angenommen, deren Seiten alle kleiner als 180° sind §. 161., aber doch größer als 90° seyn können. Da nun die trigonometrischen Linien sowohl zu spitzen Bogen (unter 90°) als zu deren stumpfen Ergänzungen zu 180° gehören, oder Bogen, die sich zu 180° ergänzen, gleiche trigonometrische Linien haben, (§. 6. Trig.): so ist es also an sich ungewiß, ob das Gesuchte oder die gefundene trigonometrische Linie zu einem Bogen unter 90° oder zu dessen Supplement gehöre, mithin kleiner oder

größer

größer als ein Quadrant sey. Es müßte also aus der Beschaffenheit der gegebenen Stücke hergeleitet werden, ob das Gefundene z. B. 30° oder 150° beträgt. Dies würde sehr weitläuftig seyn und eine Menge Lehrsätze über die Lage der Ebenen erfordern, wenn man z. B. erweisen wollte, daß die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen beyde Perpendikel einer wie der andere kleiner oder größer als Quadranten oder 90° sind, kleiner als ein Quadrant, aber größer als ein Quadrant ist, wenn das ein Perpendikel, gleich viel welches, kleiner, das andere größer als ein Quadrant oder 90° ist. Denn die Proportion (die erste unserer Tafel) r : Cos. AB = Cos. CB : Cos. AC bestimmt darüber nichts, ob Cos. AC einem Bogen unter 90° oder dessen Supplemente zugehört, ob z. B. AC = 60° oder = 120° ist.

§. 173.

Jede Proportion enthält also eine Zweydeutigkeit, weil die gefundene trigonometrische Linie zweyen Bogen angehört, die Supplemente einer von dem andern sind. Man kann diese Zweydeutigkeit auf einem kürzern Wege, als §. 172. erwähnt worden, heben, und zwar auf folgende Weise: Supplementbogen nämlich haben zwar

gleiche

gleiche trigonometrische Linien, aber einige derselben, nämlich Cosinus, Tangente, Cotangente u. s. w. sind für Bogen über 90° oder im zweyten Quadranten negativ (§. 68 — 73). In den meisten Fällen wird sich also auf diese Weise, d. h. durch Bezeichnung der trigonometrischen Linien und durch Anwendung der Regeln über die Multiplication und Division entgegengesetzter Größen (§. 8. 9. Alg.) eben gedachte Zweydeutigkeit heben lassen, wenn diese Methode gleich keine scharfe mathematische Ueberzeugung gewähren sollte. Wendet man das hier Gesagte auf die §. 172. angeführte Proportion r : Cos. AB = Cos. BC : Cos. AC an, so ergiebt sich, daß, wenn die beyden mittlern Glieder derselben entweder beyde + oder beyde — d. h. die beyden Perpendikel des rechtwinklichten Kugeldreyecks entweder beyde kleiner oder größer als 90° oder Quadranten sind, der Cosinus der Hypotenuse in beyden Fällen positiv oder die Hypotenuse selbst kleiner als 90° oder als ein Quadrant ist. Ist aber einer von den beyden mittlern Gliedern der Proportion positiv, der andere negativ, d. h. das eine Perpendikel kleiner und das andere größer als ein Quadrant, so ist der Cosinus der Hypotenuse negativ und die Hypotenuse selbst größer als ein Quadrant, weil nach den Regeln der Multiplica-

tion

tion mit entgegengesetzten Größen das Product gleichartiger positiv, ungleichartiger negativ ist.

§. 174.

Bogen heißen spitz, wenn sie unter 90°, stumpf, wenn sie über 90° sind; ferner sollen zwey Bogen oder zwey Winkel, oder ein Bogen und ein Winkel gleichartig heißen, wenn sie beyde zugleich spitz oder stumpf; ungleichartig aber, wenn der eine spitz, der andere stumpf ist.

Aus oben §. 169. angeführten Proportionen (die erste ausgenommen) lassen sich nun folgende Schlüsse in Absicht auf die Beschaffenheit des Gesuchten herleiten.

1) In der Proportion r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB ist Sin. AB immer positiv, mithin Tang. CB positiv oder negativ, je nachdem es Tang. A ist, d. h. ein schiefer Winkel und das ihm gegenüberliegende Perpendikel sind gleichartig oder das Perpendikel ist spitz oder stumpf, je nachdem es der gegenüberliegende Winkel ist.

2) In der Proportion r : Cos. CB = Cos. AB : Cos. CA ist das letzte Glied positiv, wenn die mittlern Glieder beyde entweder positiv oder negativ sind, negativ aber, wenn eines positiv, das andere negativ ist; d. h. CA oder die Hypotenuse

ist

ist kleiner als ein Quadrant, wenn beyde Perpendikel entweder kleiner oder größer sind, aber die Hypotenuse ist größer als ein Quadrant, wenn ein Perpendikel gleichviel welches kleiner, das andere größer als ein Quadrant ist.

Aus angeführter Proportion folgt diese: Cos. CB : r = Cos. CA : Cos. AB und aus der Ansicht derselben erhellet, daß die Perpendikel gleichartig oder ungleichartig sind, je nachdem die Hypotenuse spitz oder stumpf ist.

3) In der Proportion r : Cos. A = Cot. AB : Cot. CA (§. 169.) ist Cot. CA positiv, wenn die beyden mittlern Glieder positiv oder negativ sind; negativ aber, wenn eines der Glieder positiv, das andere negativ ist; d. h. die Hypotenuse ist spitz, wenn ein Perpendikel und ein anliegender Winkel beyde spitz oder stumpf, d. h. gleichartig sind; aber die Hypotenuse ist stumpf, wenn eben gedachte Stücke ungleichartig sind.

4) In der Proportion r : Cos. CA = Tang. C : Cot. A ist das letzte Glied positiv oder negativ, mithin der Winkel A spitz oder stumpf, wenn die Hypotenuse und der andere Winkel beyde entweder spitz oder stumpf, oder der eine spitz, der andere stumpf, oder beyde gleichartig oder ungleichartig sind.

§. 175.

§. 175.

Aehnliche Betrachtungen zeigen, ob das Gesuchte spitz oder stumpf ist in allen Fällen, ausgenommen sind jedoch die Fälle 5, 9, 10, 11, 13. Die Zweydeutigkeit des 5ten und 13ten Falles entscheidet sich aus §. 174. N. 1. Aber die Zweydeutigkeit in den Fällen 9, 10 und 11 läßt sich aus den gegebenen Größen nicht entscheiden.

Diese 3 Proportionen sind:

r : Cot. A = Tang. BC : Sin. AB

Sin. A : Sin. CB = r : Sin. AC

Cos. CB : r = Cos. A : Sin. C.

Da nämlich die gegebenen Stücke dieser Proportionen in den beyden Dreyecken ACB und Acb Fig. 82. die nämlichen sind, so ist es ungewiß, ob die gefundenen Stücke AB, AC und C im Dreyeck ACB oder Ab, Ac und c im Dreyeck Acb sind.

Von schiefwinklichten sphärischen Dreyecken.

§. 176.

Aufgabe. Zu bestimmen, unter welchen Umständen das Perpendikel innerhalb oder außerhalb eines schiefen Dreyecks fällt. Fig. 83.

Auf-

Auflösung. 1) Auf dem Kreise dab DAB stehe der Halbkreis aPA senkrecht. In diesem nehme man einen Punct P nach Gefallen an und lege durch diesen Punct unter einem schiefen Winkel den Halbkreis dPD, welcher mit dem untern Kreise, den wir den Grund nennen wollen, unstreitig schiefe, d. h. zwey spitze und zwey stumpfe Winkel macht. Ist PA ein spitzer Bogen, so sind auch die Winkel ADP und AdP spitz und aDP und adP stumpf. Der spitze Bogen liegt also zwischen den spitzen, der stumpfe Bogen zwischen den stumpfen Winkeln.

2) Man lege einen zweyten Halbkreis BPb durch den Punct P, so sind die Winkel ABP, ADP spitz und abP, adP stumpf. Nimmt man nun BA $\sphericalangle$ 90°, so ist auch PB $\sphericalangle$ 90° (§. 174. Num. 2.).

3) Die vorliegende Figur stellt vier Dreyecke vor:

I. BPD, welches am Grunde zwey spitze Winkel hat.

II. bdP, welches am Grunde zwey stumpfe Winkel hat.

III. bPD, worin D stumpf, b spitz ist.

IV. BPd, worin B stumpf, d spitz ist.

Hier-

Hieraus folgt also: das spitze Perpendikel AP fällt innerhalb des Dreyecks I. und das stumpfe Perpendikel innerhalb des Dreyecks II. Oder:

a) Wenn in einem Dreyeck die Winkel am Grunde gleichartig sind, so fällt das Perpendikel innerhalb des Dreyecks und ist mit den Winkeln gleichartig, entweder spitz, wenn die Winkel spitz, oder stumpf, wenn die Winkel stumpf sind.

b) Sind die Winkel am Grunde ungleichartig, so fällt das Perpendikel außerhalb des Dreyecks und ist mit dem zunächst liegenden Winkel ungleichartig. Z. B. das Perpendikel AP ist spitz, aber der Winkel PDb, der ihm am nächsten liegt, stumpf.

§. 177.

3) Wenn man die Buchstaben des Dreyecks Fig. 81. in die Buchstaben Fig. 83. verwandelt und $r = 1$ setzt, so ist Cot. PDA = Cot. PA . Sin. AD (nach dem zweyten Fall der Tafel). Man nehme PA unveränderlich an, so wächst der zweyte Factor, nämlich Sin. AD, wenn der Bogen AD wächst und ist positiv und das Product, nämlich Cot. PDA, wächst also auch und ist positiv.

tiv. Wenn aber die Cotangente eines Bogens oder Winkels wächst, so nimmt der Bogen oder Winkel ab; folglich wird unter diesen Umständen der Winkel PDA kleiner oder spitziger oder nimmt ab. Beym Wachsen des Bogens AD wird endlich D in Q fallen, und da AQ = 90° ist, so wird Sin. AQ = 1, folglich Cot. PDA = Cot. PA und Q der Pol von PA. Rückt D über Q hinaus nach D', so nimmt der Factor Sin. AD ab, weil der Sinus eines stumpfen Bogens wieder kleiner wird, also wird auch das Product Cot. PDA kleiner, d. h. dieser Winkel wird wieder größer, bis D in b fällt, wo Sin. AD = Sin. Ab und AD = Ab und D = b = B wird.

§. 178.

4) So wie D nach Q rückt, nähert sich d dem Puncte q, der Winkel adP, die Ergänzung des Winkels ADP zu 180°, nimmt also zu, weil der letztgenannte, nämlich ADP, abnimmt. In q wird er = Pa, von wo an er wieder abnimmt, weil seine Ergänzung über Q hinaus wieder zunimmt.

5) Im Dreyeck PDb wächst der stumpfe Winkel, so wie der spitze Nebenwinkel PDA abnimmt. Dieser nimmt aber, wie wir gesehen ha-

ben, bis Q ab oder wenn D bis in Q rückt, folglich muß der stumpfe Winkel wachsen, so wie die Seite Db abnimmt oder D sich Q nähert. Rückt D über Q nach D′ hinaus, so nimmt der Winkel ADP wieder zu und folglich der Winkel PDb wieder ab (weil beyde zusammen immer nur 180° ausmachen können); fällt endlich D in b, so wird der Winkel PDb = Pba.

§. 179.

6) Bey gehöriger Aenderung der Buchstaben ist nach dem ersten Fall der Tafel Cos. PD = Cos. PA . Cos. AD, wo der erste Factor, nämlich Cos. PA, unveränderlich ist. Rückt nun D von A nach Q, so ist, weil AQ = 90°, der Factor Cos. DA diesseits Q positiv und nimmt ab, weil für einen wachsenden Bogen unter 90° der Cosinus positiv und abnehmend ist. Das Product muß also, weil auch Cos. PA positiv ist (weil PA < 90°), positiv oder der Bogen PD unter 90° oder spitz seyn. Sobald D in Q fällt, wird Cos. AD = Cos. AQ = 0, weil AD = AQ = 90° und Cos. PD = 0, weil, wenn ein Factor = 0 ist, das ganze Product = 0 wird, folglich PD = PQ = 90°. Ueber Q hinaus wird Cos. DA = Cos. AD′ negativ,

also auch Cos. PD = Cos. PD′ negativ und der Bogen PD′ wächst, bis D′ in b fällt.

§. 180.

7) Im Dreyeck bPd nimmt der stumpfe Bogen Pd ab, so wie PD zunimmt (beyde nämlich = 180°); bis an q ist er noch stumpf, in q = 90° und diesseits q spitz, weil seine Ergänzung stumpf wird.

8) Ist AB > AD, so mache man AT = AD und es ist alsdann PD = PT und PDA = PTA, also PTB = 2R − PTA = 2R − PDA. Alsdann ist PT = PD < PB, wie leicht erhellt, wenn man T von A nach B rücken läßt (§. 179.).

§. 181.

9) Die beyden rechtwinklichten Dreyecke BAP und DAP haben das Perpendikel gemeinschaftlich, übrigens sind alle Seiten derselben spitz. Der erste Fall der Tafel §. 170. lautet:

r : Cos. AB = Cos. CB : Cos. AC oder

r = 1 gesetzt,

1 : Cos. AB = Cos. CB : Cos. AC, und

Cos. AC = Cos. CB . Cos. AB, und

$$\frac{\text{Cos. AC}}{\text{Cos. AB}} = \text{Cos. CB.}$$

Diese

Diese Formel auf Fig. 83. angewandt giebt:

$$\text{Cos. AP} = \frac{\text{Cos. BD}}{\text{Cos. AD}}, \text{ aber auch}$$

$$\text{Cos. AP} = \frac{\text{Cos. BP}}{\text{Cos. AB}}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\text{Cos. PD}}{\text{Cos. AD}} = \frac{\text{Cos. BP}}{\text{Cos. AB}}.$$

Weil nun nach der Voraussetzung AD $\prec$ AB, so ist Cos. AD $\succ$ Cos. AB, also Cos. PD $\succ$ Cos. BP, weshalb PD $\prec$ BP, weil der größere Cosinus zum kleinern, der kleinere Cosinus zum größern Bogen gehört, oder, wenn der Bogen zunimmt, der Cosinus abnimmt.

§. 182.

10) Wenn also im Dreyeck BPD die Stücke BP, PD und B gegeben sind, so läßt sich daraus ein anderes Dreyeck PBT construiren, welches eben dieselben gegebenen Stücke hat, wenn nämlich PD $\prec$ BP ist, sonst aber nicht (§. 180. Num. 8.), und ist im letzten Fall BDP allemal spitz (§. 177. Num. 3.).

11) Aus den gegebenen Stücken bP, b und Pd des Dreyecks dPb kann auch bPt werden, wenn Pd $\succ$ Pb, sonst aber nicht, und ist im letzten Fall Pdb stumpf. Denn wenn PD $\prec$ BP, so ist Pd $\succ$ Pb.

12) Aus den gegebenen Stücken PD, Pb und dem Winkel PbD des Dreyecks PDb läßt sich auch das Dreyeck PTb construiren, wenn PD $\lessdot$ 2R−Pb.

13) Aus den gegebenen Stücken des Dreyecks BPd, nämlich PBd, PB und Pd läßt sich auch das Dreyeck PtB construiren, wenn PB $\gtrdot$ 2R −Pd.

§. 183.

Es sey das Dreyeck PBD Fig. 84. das eben so benannte Dreyeck der vorigen Figur und Seiten und Winkel so bezeichnet, wie es diese Figur andeutet. Ist nun im Dreyeck PBD W und l spitz und L $\lessdot$ l, so ist w zweydeutig, ist aber L $\gtrdot$ l, so ist w spitz (§. 182. Num. 10.); sind W und l stumpf und L $\gtrdot$ l, so ist w zweydeutig, wenn aber L $\lessdot$ l, so ist W spitz, l stumpf, L $\lessdot$ 2R−l, so ist w zweydeutig, ist aber L $\gtrdot$ 2R−l, so ist w stumpf (§. 182. 12.); ist W stumpf, l spitz, L $\gtrdot$ 2R−l, so ist w zweydeutig, wenn aber L $\lessdot$ 2R−l, so ist w spitz (§. 182. Num. 13.).

Diese Bestimmungen kann man in folgende Tafel bringen:

W	L	l	W
spitz	L Λ 1	— — —	zweydeutig
stumpf	L V 1	— — —	spitz
spitz	L Λ 1	— — —	stumpf
stumpf	L V 1	— — —	zweydeutig
spitz	L V 2R − 1	— — —	spitz
stumpf	L Λ 2R − 1	— — —	stumpf
zweydeutig	L V 2R − 1	— — —	zweydeutig
zweydeutig	L Λ 2R − 1	— — —	spitz

§. 184.

Im Dreyeck PAD oder PAD′ ist nach §. 170.

Cot. D = Cot. AP . Sin. AD und

Cot. D′ = Cot. AP . Sin. AD′.

Nun sey AD = 2R − AD′, folglich Sin. AD = Sin. AD′ und Sin. ADP = Sin. AD′P, weil Cot. ADP = Cot. AP . Sin. AD. Da nun Cot. AP unverändert bleibt, so hängt ADP

von

von AD ab; ist demnach Sin. AD = Sin. AD′, so ist auch ADP = AD′P. Weil ferner AD + AD′ = 180°, so ist Cos. AD = − Cos. AD, folglich Cos. PD = − Cos. PD′, weil Cos. DP = Cos. AP . Cos. AD, wo, weil AP unveränderlich, DP von AD abhängt; folglich PD + PD′ = 2R. Nun ist das gröste AD′ = 2R − AB, folglich das kleinste AD = AB. Für AD = AB ist ADP = ABP; für AD ▷ AB ist ADP ◁ ABP; denn Cot. ADP = Cot. AP . Sin. AD und Cot. ABP = Cot. AP . Sin. AB; für AD = AB, ist demnach Cot. ADP = Cot. ABP und ADP = ABP; für AD ▷ AB ist Sin. AD ▷ Sin. AB, folglich Cot. ADP ▷ Cot. ABP; also ADP ◁ ABP und für AD ◁ AB ist Sin. AD ◁ Sin. AB, folglich Cot. ADP ◁ Cot. ABP, mithin ADP ▷ ABP.

§. 185.

Hieraus lassen sich nachfolgende Sätze herleiten:

1) „Wenn im Dreyeck BDP die Stücke BP, „DBP, BDP gegeben sind und BDP ◁ DBP, „so giebt es dafür 2 Dreyecke und des zweyten „Seite ist PD′ = 2R − PD′. Ist aber BDP

„ ▷

„> DBP, so giebt es nur ein Dreyeck, dessen „Seite PD spitz ist."

2) „Wenn im Dreyeck dPb die Stücke bP, „b, d gegeben sind, so kann die dritte Seite Pd „oder Pd' seyn, wofern 2R–Pdb < 2R–Pbd „oder Pbd < Pdb ist. Ist aber dieses nicht, „so giebt es nur eine stumpfe Seite."

3) „Wenn im Dreyeck DbP die Stücke Pb, „b, D gegeben sind, so finden zwey Seiten statt, „wenn 2R–PDb < Pbd ist; sonst aber ist „nur eine spitze Seite PD."

4) „Wenn im Dreyeck BPd die Stücke BP, „B, d gegeben sind, so finden zwey Seiten statt, „wenn PdB < 2R–PBd ist; sonst aber ist „nur eine stumpfe Seite Pd."

Diese Fälle lassen sich in nachfolgende Tabelle bringen, wo die Buchstaben W. w, L, l die nämliche Bedeutung wie in §. 183. haben.

W							
spitz	— — —	stumpf	— — —	spitz	— — —	stumpf	— — —

1							
spitz	— — —	stumpf	— — —	spitz	— — —	stumpf	— — —

W							
Λ	W	V	W	Λ	W	V	W

L			
zweydeutig	stumpf	zweydeutig	spitz
spitz	zweydeutig	stumpf	zweydeutig

§. 186.

Lehrsatz. In sphärischen Dreyecken verhalten sich die Sinus der Winkel, wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten.

Beweis. In dem sphärischen Dreyeck PBD Fig. 85. und 86. ist das Perpendikel PA senkrecht herabgefällt auf BD, wodurch man zwey

recht=

rechtwinklichte Dreyecke BPA, DPA bekommt, welche das Perpendikel PA gemein haben.

Durch Combination von Proportionen für rechtwinklichte Dreyecke, in denen r und PA vorkommen, suche man Vergleichungen zwischen den Theilen der Dreyecke anzustellen.

Die erste Proportion für rechtwinklichte Dreyecke §. 163. ist für Fig. .

r : Sin. CA = Sin. A : Sin. CB oder für

Fig. 85. u. 86.

r : Sin. BP = Sin. B : Sin. PA, und

r : Sin. PD = Sin. D : Sin. PA. Also

r . Sin. PA = Sin. B . Sin. BP, und

r . Sin. PA = Sin. D . Sin. PD, also

Sin. B . Sin. BP = Sin. D . Sin. PD,

folglich

Sin. B : Sin. D = Sin. DP : Sin. BP.

Also: Die Sinus der Winkel verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten. Dies ist etwas Aehnliches wie bey geradlinichten Dreyecken, wo es heißt: Die Sinus der Winkel verhalten sich wie die gegenüberliegenden Seiten.

§. 187.

§. 187.

Lehrsatz. In sphärischen Dreyecken verhalten sich die Tangenten der Winkel, wie die Sinus der entgegengesetzten Abschnitte des Grundes.

Beweis. Aus der Proportion (§. 169. b):

r : Sin. AB = Tang. A : Tang. CB, für Fig. 81. folgt

r : Sin. BA = Tang. B : Tang. PA, für Fig. 85. u. 86. und

r : Sin. AD = Tang. D : Tang. PA, also

r . Tang. PA = Tang. B . Sin. BA, und

r . Tang. PA = Tang. D . Sin. AD, also

Tang. B . Sin. BA = Tang. D . Sin. AD, oder

Tang. B : Tang. D = Sin. AD : Sin. BA.

Also: Die Tangenten der Winkel B und D verhalten sich, wie die Sinus der entgegengesetzten Bogen AD und BA, die durch das Perpendikel bestimmt werden.

§. 188.

Lehrsatz. Die Cosinus der Seiten eines sphärischen Dreyecks verhalten sich, wie die Cosinus der anliegenden Abschnitte des Grundes.

Beweis. Aus der Proportion r : Cos. CB = Cos. AB : Cos. CA (§. 169. c) wird

Cos. CB : r = Cos. CA : Cos. AB, und (für Fig. 85. 86.)

Cos. PA : r = Cos. BP : Cos. BA, und

Cos. PA : r = Cos. PD : Cos. AD, also

Cos. BP : Cos. BA = Cos. PD : Cos. AD.

Also: Die Cosinus der Bogen BP und PD verhalten sich, wie die Cosinus der beyden anliegenden Bogen BA und AD.

§. 189.

Lehrsatz. Die Cosinus der Winkel eines sphärischen Dreyecks verhalten sich, wie die Sinus der Winkel an der Spitze.

Beweis. Aus der Proportion (§. 169. d):

r : Cos. CB = Sin. C : Cos. A (für Fig. 81) wird

r : Cos. PA = Sin. BPA : Cos. B (für Fig. 85. 86) und

r : Cos. PA = Sin. DPA : Cos. D, folglich

Sin. BPA : Cos. B = Sin. DPA : Cos. D.

Also: Die Cosinus der Winkel B und D verhalten sich, wie die Sinus der Winkel bey P, die ihnen zunächst liegen.

§. 190.

§. 190.

Lehrsatz. Die Tangenten der Schenkel eines sphärischen Dreyecks verhalten sich, wie entgegengesetzte Winkel an der Spitze.

Beweis. Aus der Proportion (§. 169. h):

r : Cos. A = Tang. CA : Tang. AB (für Fig. 81) wird

r : Cos. B = Tang. PB : Tang. AB (Fig. 85. 86),

also, wenn man statt B den Winkel P setzt,

r : Cos. BPA = Tang. BP : Tang. PA,

und

r : Cos. DPA = Tang. PD : Tang. PA,

folglich

r . Tang. PA = Cos. BPA . Tang. BP.

und

r . Tang. PA = Cos. DPA . Tang. PD,

also

Cos. BPA . Tang. BP = Cos. DPA . Tang. PD, und

Cos. BPA : Cos. DPA = Tang. PD : Tang. BP.

Also: Die Tangenten der Schenkel verhalten sich, wie die Winkel bey P, die am entferntesten von ihnen liegen.

§. 191.

§. 191.

Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten eines schiefwinklichten sphärischen Dreyecks ADB Fig. 80. den Winkel A zu finden.

Auflösung. 1) Man benenne die Winkel und Seiten des Dreyecks so, wie die Figur zeigt. C ist der Kugel Mittelpunct, ferner DE senkrecht auf AC und DG senkrecht auf BC, so ist für den Halbmesser der Kugel $= 1$

$$DE = \text{Sin.}\,b,\quad CE = \text{Cos.}\,b,$$
$$DG = \text{Sin.}\,a,\quad CG = \text{Cos.}\,a.$$

2) Ist DF ein Loth oder Perpendikel auf der Ebene ACB, so ist FE senkrecht auf CA und FG senkrecht auf BC (§. 160.), mithin $DEF = A$ und $DGF = B$.

3) Im rechtwinklichten Dreyeck DEF ist $DF = DE \cdot \text{Sin.}\,A = \text{Sin.}\,b \cdot \text{Sin.}\,A$ und $EF = ED \cdot \text{Cos.}\,A = \text{Sin.}\,b \cdot \text{Cos.}\,A$.

4) Im Dreyeck ECG ist $EG^2 = CG^2 + CE^2 - 2\,CG \cdot Cx$ (Geom. §. 101.). Aber $CG = \text{Cos.}\,a$, $CE = \text{Cos.}\,b$, $Cx = CE \cdot \text{Cos.}\,d = \text{Cos.}\,b \cdot \text{Cos.}\,d$, folglich $EG^2 = \text{Cos.}\,a^2 + \text{Cos.}\,b^2 - 2\,\text{Cos.}\,a \cdot \text{Cos.}\,b \cdot \text{Cos.}\,d$.

5) Im Dreyeck ECG ist $EG : CG = \text{Sin.}\,d : \text{Sin.}\,CEG$, also $\text{Sin.}\,CEG = \text{Cos.}$

$$FEG = \frac{\text{Cos.}\,a \cdot \text{Sin.}\,d}{EG},$$

7)

6) Im Dreyeck GEF ist ebenfalls wie in 5

$$FG^2 = EG^2 + EF^2 - 2\,EG \,.\, EF \,.\, \text{Cof. FEG.}$$

Aber $\text{Cof. FEG} = \frac{\text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d}}{EG}$ (6), also

$$FG^2 = EG^2 + EF^2 - 2\,EG \,.\, EF \,.\, \frac{\text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d}}{EG}$$

$$= EG^2 + EF^2 - 2\,EF \,.\, \text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d.}$$

7) Das Dreyeck DFG ist bey F rechtwinklicht, weil DF auf der Ebene ACB, mithin auf jeder Linie durch F senkrecht steht, folglich ist

$$FG^2 = DG^2 - DF^2.$$

8) Man setze beyde Werthe von FG^2 gleich, so hat man

$$DG^2 - DF^2 = EG^2 + EF - 2\,EF \,.\, \text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d, und}$$

$$DG^2 - DF^2 + 2\,EF \,.\, \text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d} = EG^2 + EF^2, \text{ und}$$

$$2\,EF \,.\, \text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d} = EG^2 + EF^2 - DG^2 + DF^2.$$

9) $EF^2 + DF^2 = ED^2$, also

$$2\,EF \,.\, \text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d} = EG^2 + ED^2 - DG^2.$$

Man setze nun für EG^2, ED^2 und DG^2 die Werthe (aus 1 und 4), so hat man

$$2\,EF \,.\, \text{Cof. a} \,.\, \text{Sin. d} = \text{Cof. a}^2 + \text{Cof. b}^2 - 2\,\text{Cof. a} \,.\, \text{Cof. b} \,.\, \text{Cof. d} + \text{Sin. b}^2 - \text{Sin. a}^2.$$

10) Weil aber $\text{Sin. } b^2 + \text{Cos. } b^2 = 1$ und $\text{Cos. } b^2 = 1 - \text{Sin. } b^2$ und $\text{Cos. } a^2 - 1 = -\text{Sin. } a^2$, so bekommt man

$$2\,EF \,.\, \text{Cos. } a \,.\, \text{Sin. } d$$
$$= \text{Cos. } a^2 + 1 + \text{Cos. } a^2 - 1 - 2\,\text{Cos. } a \,.\, \text{Cos. } b \,.\, \text{Cos. } d$$
$$= 2\,\text{Cos. } a^2 - 2\,\text{Cos. } a \,.\, \text{Cos. } b \,.\, \text{Cos. } d$$
$$= 2\,\text{Cos. } a\,(\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \,.\, \text{Cos. } d).$$

11) $EF = ED \,.\, \text{Cos. } A$
$= \text{Sin. } b \,.\, \text{Cos. } A$ (3), folglich

$$2\,\text{Sin. } b \,.\, \text{Cos. } A \,.\, \text{Cos. } a \,.\, \text{Sin. } d$$
$$= 2\,\text{Cos. } a\,(\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \,.\, \text{Cos. } d),$$

und, wenn durch 2 Cos. a auf beyden Seiten dividirt wird,

$$\text{Sin. } b \,.\, \text{Cos. } A \,.\, \text{Sin. } d$$
$$= \text{Cos. } a - \text{Cos. } b \,.\, \text{Cos. } d, \text{ also}$$
$$\text{Cos. } A = \frac{\text{Cos. } a - \text{Cos. } b \,.\, \text{Cos. } d}{\text{Sin. } b \,.\, \text{Sin. } d}.$$

Man wird diese Regel leicht behalten, wenn man nur bemerkt, daß die Seiten im Divisor den gesuchten Winkel einschließen, im Dividendus a dem gesuchten Winkel gegenüber steht, b und d den gesuchten Winkel wieder einschließen.

12) Der Divisor ist immer positiv (weil der Sinus eines Bogens unter 180° positiv ist), folglich

lich ist Cos. A positiv oder negativ, oder der Winkel selbst spitz oder stumpf, je nachdem der Dividendus positiv oder negativ ist.

13) Aus der Formel

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}} \text{ wird}$$

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}} - \frac{\text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}} \text{ und}$$

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos a}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}} - \text{Cot. b} \cdot \text{Cot. d.}$$

14) Aus der Formel

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}} \text{ wird auch}$$

$$1 - \text{Cos. A} = 1 - \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}}$$

$$= \frac{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d} + \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d} - \text{Cos. a}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}}$$

$$= \frac{\text{Cos. } (b-d) - \text{Cos. a}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}}, \text{ weil}$$

$$\text{Cos. } (b-d) = \text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d} + \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d}$$

(§. 75. F. 20. analy. Trig.).

15) Weil ferner $\text{Cos. } (\alpha-\beta) - (\text{Cos. } \alpha + \beta)$ $= 2 \text{Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \beta$ (§. 75. F. 26. analy. Trig.), so setze man $b-d = \alpha-\beta$ und

$$\frac{a = \alpha+\beta}{a+b-d = 2\alpha}$$

$$a-(b-d) = 2\beta$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(a+(b-d))$$

$$\beta = \tfrac{1}{2}(a-(b-d)).$$

So

So erhält man $1 - \text{Cof. } A = \frac{\text{Cof.}(b-d) - \text{Cof. } a}{\text{Sin. b. Sin. d}}$

$= \frac{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}(a+(b-d)) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(a-(b-d))}{\text{Sin. b . Sin. d}}$.

Ferner $1 - \text{Cof. } A = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A^2$ (anal. Trig. §. 75. F. 36.), folglich

$\text{Sin. } \frac{1}{2} A^2 = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+(b-d)) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(a-(b-d))}{\text{Sin. b . Sin. d}}$.

In dieser Gestalt läßt sich diese Formel bequem durch Logarithmen berechnen, in der übrigens der Sinus totus $= 1$ angenommen worden ist. Es bedeute aber $\text{Sin. } \frac{1}{2} A$ den Sinus des halben Winkels A für den Halbmesser $= 1$ und $\text{Sin. tab. } \frac{1}{2} A$ den Sinus von $\frac{1}{2} A$ für den Halbmesser $= r$, oder den Halbmesser der Tafeln, so ist $\text{Sin. tab. } \frac{1}{2} A = r \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2} A$, und

$$\frac{\text{Sin. tab. } \frac{1}{2} A}{r} = \text{Sin. } \frac{1}{2} A, \text{ und}$$

$$\frac{\text{Sin. tab. } \frac{1}{2} A^2}{r^2} = \text{Sin. } \frac{1}{2} A^2.$$

17) Dadurch bekommt die Formel folgende Gestalt:

$$\frac{\text{Sin. tab. } \frac{1}{2} A^2}{r^2}$$

$$= \frac{\frac{\text{Sin. tab. } \frac{1}{2}(a+b-d) \cdot \text{Sin. tab. } \frac{1}{2}(a-(b-d))}{r^2}}{\frac{\text{Sin. tab. b . Sin. tab. d}}{r^2}}$$

$$= \frac{\text{Sin. tab. } \frac{1}{2}(a+b-d) \cdot \text{Sin. tab. } \frac{1}{2}(a-(b-d)) \cdot r^2}{r^2 \cdot \text{Sin. tab, b . Sin. tab. d}}$$

$$= \frac{\text{Sin. tab} \cdot \frac{1}{2}(a+b-d) \cdot \text{Sin. tab} \cdot \frac{1}{2}(a-(b-d))}{\text{Sin. tab} \cdot b \cdot \text{Sin. tab} \cdot d}$$

und $\text{Sin. tab} \cdot \frac{1}{2}A^2$

$$= \frac{\text{Sin. tab} \cdot \frac{1}{2}(a+b-d) \cdot \text{Sin. tab} \cdot \frac{1}{2}(a-(b-d)) \cdot}{\text{Sin. tab} \cdot b \cdot \text{tab} \cdot d.}$$

§. 192.

Man könnte die Formel

$$\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}}$$

nach folgender Gestalt verändern:

$$1 - \text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. (b-d)} - \text{Cos. a}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin d}} \quad (15)$$

$$1 + \text{Cos. A.} = \frac{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. d} + \text{Cos. a}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. d}}$$

$$= \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. (b+d)}}{\text{Sin. b. Sin. d}} \quad (\text{§. 75. F. 19.})$$

$\frac{1-\text{Cos. A}}{1+\text{Cos.}} = \text{Tang.} \frac{1}{2}A^2$ (§. 75. F. 36 anal. Trig.,) wobey man sich erinnern muß, daß

$\frac{\text{Sin. A}}{\text{Cos. A}} = \text{Tang. A}$ ist),

$$\text{Tang.} \frac{1}{2}A^2 = \frac{\text{Cos. (b-d)} - \text{Cos. a}}{\text{Cos. a} - \text{Cos. (b+d)}}, \text{ aber}$$

$$\text{Cos. p} - \text{Cos. q} = -2 \text{Sin.} \frac{1}{2}(p+q) \text{ Sin.} \frac{1}{2}(p-q), \text{ also}$$

$$\text{Tang.} \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(b-d+a) \text{Sin.} \frac{1}{2}(b-d-a)}{\text{Sin.} \frac{1}{2}(a+b+d) \text{Sin.} \frac{1}{2}(a-b-d)}}.$$

§. 193.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Kugeldreyeck ein anderes zu verzeichnen, dessen Seiten

ten die Winkel und deſſen Winkel die Seiten des erſtern zu 180° ergänzen.

Auflöſung. Man verlängere jede Seite des Dreyecks ABC Fig. 87. zu einem Quadranten, ſo daß AE = AF = BI = BD = CG = CH = 90° wird, und lege durch die auf die Art erhaltenen Puncte E, F, I, D, G, H gröſte Kreiſe, welche ſich in a, b, c ſchneiden, ſo iſt abc das verlangte Dreyeck.

Beweis. Zufolge der Conſtruction ſind A, B, C die Pole von cb, ac, ab (Geom. §. 279.,) folglich Ac = Bc = 90° und c der Pol von AB oder IF, eben ſo iſt a der Pol von DG und b von EH. Die Bogen cI, cF, aD, aG, bE, bH ſind demnach Quadranten, ſo wie auch nach der Conſtruction AE, AF, BD, BI, CG, CA Quadranten ſind. Nun iſt DG das Maaß des Winkels a und DB + CG = 180° = DB + CB + BG = DB + BG + CB = DG + CB; folglich iſt DG oder das Maaß des Winkels a die Ergänzung von CB zu 180°; eben ſo ſind EH oder das Maaß von b und IF oder das Maaß von c die Ergänzungen von CA und AB zu 180°.

Eben ſo iſt EF das Maaß des Winkels A und cF + Eb = 180° = cF + bF + EF =

cb + EF; folglich ergänzt cb den Bogen EF oder das Maaß des Winkels A zu 180°. Eben so sind ca und ab die Ergänzungen von ID und HG, den Maaßen der Winkel B und C.

§. 194.

Aufgabe. Aus den drey gegebenen Winkeln eines sphärischen Dreyecks eine seiner Seiten zu finden.

Auflösung. Das gegebene Dreyeck sey ABC Fig. 87.; man construire aus dem Dreyeck ABC ein anderes abc, dessen Seiten jenes Winkels und dessen Winkel jenes Seiten zu 180° ergänzen.

Nach §. 191. ist alsdann Cos. a

$$= \frac{\text{Cos cb} - \text{Cos. ac . Cos ab}}{\text{Sin. ac . Sin. ab}}.$$

Nach dem vorigen §. ist nun

a + CB = 180°, folglich Cos. a = − Cos. CB
cb + A = 180°, — Cos. cb = − Cos. A
ca + B = 180°, — Cos. ca = − Cos. B
ab + C = 180°, — Cos. ab = − Cos. C
Sin. ac = + Sin. B
Sin. ab = + Sin. C.

Folglich, wenn man diese Werthe in obige Gleichung bringt, so hat man

— Cos.

$$-\text{Cof. CB} = -\frac{\text{Cof. A} - \text{Cof. B} \cdot \text{Cof C}}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}} \text{ oder}$$

$$\text{Cof. CB} = \frac{\text{Cof. A} + \text{Cof. B} \cdot \text{Cof. C}}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}}.$$

Aus §. 75. F. 36. ist

$$\text{Cof. x} = 2\,\text{Cof.}\tfrac{1}{2}\text{x}^2 - 1 \text{ und } 1 + \text{Cof. x}$$

$$= 2\,\text{Cof.}\tfrac{1}{2}\text{x}^2 \text{ und } \frac{1+\text{Cof. x}}{2} = \text{Cof.}\tfrac{1}{2}\text{x}^2,$$

folglich auch

$$\text{Cof.}\tfrac{1}{2}\text{CB}^2 = \frac{1+\text{Cof. CB}}{2}$$

$$= 1 + \frac{\text{Cof. A} + \text{Cof. B} \cdot \text{Cof. C}}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}}$$

$$= \frac{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C} + \text{Cof. A} + \text{Cof. B} \cdot \text{Cof C}}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}} \text{ und}$$

$$\text{Cof.}\tfrac{1}{2}\text{CB}^2 = \frac{\text{Sin. B . Sin. C} + \text{Cof. A} + \text{Cof. B . Cof. C}}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}}$$

$$= \frac{\text{Cof. (B-C)} + \text{Cof. A}}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}} \text{ (§. 75. F. 20.)}$$

Aber $\text{Cof. x} + \text{Cof. y}$

$= 2\,\text{Cof.}\tfrac{1}{2}(\text{x}+\text{y}) \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}(\text{x}-\text{y})$ (§. 75. F. 29.)

In diese Formel bringe man B – C statt x und A statt y, so hat man

$$\frac{\text{Cof. (B-C)} + \text{Cof. A}}{\text{Sin. B.} \cdot \text{Sin. C}}$$

$$= \frac{2\,\text{Cof.}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C}) \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{C}-\text{A})}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}}.$$

Also $\text{Cof.}\tfrac{1}{2}\text{CB}^2$

$$= \frac{2\,\text{Cof.}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}-\text{C}) \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{C}-\text{B})}{\text{Sin. B} \cdot \text{Sin. C}}.$$

§. 195.

Aufzählung aller möglichen Fälle, welche bey schiefwinklichten Dreyecken vorkommen können, und Nachweisung, wo deren Beantwortung in der nachfolgenden Tabelle vorkommt:

Gegeben	Gesucht			
I. Alle drey Seiten.	Ein Winkel,	11ter	Fall der	Tafel.
	Eine Seite,	12ter	—	—
II. Alle drey Winkel.				
III. Zwey Seiten und ein Winkel,				
a) der eingeschlossene	die dritte Seite,	9ter	—	—
	ein Winkel,	10ter	—	—
b) der einer Seite gegenüberliegende Winkel,	der andere gegenüberliegende Winkel,	1ster	—	—
	der eingeschlossene Winkel,	4ter	—	—
	die dritte Seite,	3ter	—	—

Gegeben		Gesucht			
IV. Zwey Winkel und eine Seite,					
a) die eingeschlossene	ein Winkel,	7ter	Fall	der	Tafel.
	eine Seite,	8ter	—	—	
b) die einem gegebenen Winkel entgegenstehende Seite,	eine Seite, die einem Winkel gegenüberliegt,	2ter	—	—	
	zwischen den Winkeln,	6ter	—	—	
	der dritte Winkel,	5ter	—	—	

Gegeben

Gegeben im Dreyeck BPD Fig. 83.	Gesucht	Proportionen	Fall
BP, PD, B	D	Sin. PD : Sin. B = Sin. BP : Sin. D aus rechtw. Dreyecke 1ster Fall.	1
BP, B, D	PD	Sin. D : Sin. BP = Sin. B : Sin. PD aus rechtw. Dreyecke 1ster Fall.	2
BP, PD, B	BD	r : Cos. B = Tang. BP : Tang. BA rechtw. Dreyecke 4ter Fall und aus Cos. BP : Cos. BA = Cos. DP : Cos. DA	3
BP, PD, B	P	r : Cos. BP = Tang. B : Cos. BPA rechtw. Dreyecke 3ter Fall und aus Tang. DP : Tang. BP = Cos. BPA : Cos. DPA	4

Gegeben

Gegeben	Gesucht	Proportionen	Fall
BP, B, D	P	r : Cos. BP = Tang. B : Cot. BPA rechtw. Dreyecke 3ter Fall und aus Cos. PBA : Sin. BPA = Cos. PDA : Sin. DPA	5
BP, B, D	BD	r : Cos. B = Tang. BP : Tang. BA rechtw. Dreyecke 4ter Fall und aus Tang. PDA : Tang. PBA = Sin. BA : Sin. DA.	6
BP, B, P	D	r : Cos. BP = Tang. B : Cot. BPA rechtw. Dreyecke 3ter Fall und aus Sin. BPA : Sin DBA = Cos. B : Cos. PDA	7
BP, B, P	DP	r : Cos. BP = Tang. B : Cot. BPA rechtw. Dreyecke 3ter Fall und aus Cos. DPA : Cos. BPA = Tang. BP : Tang. DP	8

Gegeben	Gesucht	Proportionen	Fall
BP, BD, B	DP	r : Cos. B = Tang. BP : Taug. BA rechtw. Dreyecke 4ter Fall und aus Cos. BA : Cos. BP = Cos. DA : Cos. DP	9
BP, BD, B	D	r : Cos. B = Tang. BP : Tang. BA rechtw. Dreyecke 4ter Fall und aus Sin. DA : Sin. BA = Tang. PBA : Tang. PDA	10
BP, BD, PD	B	Sin. BP . Sin. BD : r^2 = Sin. $\frac{1}{2}$(PD + (BP − BD)) . Sin. $\frac{1}{2}$(PD − (BP − BD)) : Sin. $\frac{1}{2}B^2$	11
A, B, C,	CB	Cos. $\frac{1}{2}$ CB^2 = $\frac{2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\text{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin. B . Sin. C.}}$.	

§. 196.

§. 196.

Es kommt nun nur noch darauf an, für jeden Fall zu untersuchen, ob das Gesuchte stumpf oder spitz ist.

1. Fall: Sin. PD : Sin. B = Sin. BP : Sin. D.

Ist D stumpf oder spitz? Die Beantwortung dieser Frage ergiebt sich aus der Tafel §. 183.

2. Fall: Sin. D : Sin. BP = Sin. B : Sin. PD.

Ist die gesuchte Seite PD stumpf oder spitz? Die Antwort ergiebt sich aus §. 185.

3. Fall. Fällt das Perpendikel innerhalb oder außerhalb des Dreyecks? Dies entscheidet sich aus dem Winkel D (§. 176. 2) dessen Beschaffenheit man aus der Tafel §. 183. erkennt.

4. Fall. Eben die Frage und eben die Antwort.

5. Fall. Fällt das Perpendikel innerhalb oder außerhalb des Dreyecks?

Antwort: Entscheidet sich aus den gegebenen Winkeln nach §. 176.

Art des Winkels DPA? Aus AD (§. 174. 1) und AD aus §. 179.

6. Fall. Lage des Perpendikels? Wie im 5ten Fall.

Art von AD aus §. 179.

7. Fall. Lage des Perpendikels ergiebt sich aus dem Winkel BPA, den die erste Proportion ohne Zweydeutigkeit bestimmt, mit dem Winkel BPD verglichen.

8. Fall. Eben die Frage, eben die Antwort.

9. Fall. Eben die Frage beantwortet BA, mit DB verglichen. Daraus sieht man, ob BA größer oder kleiner als DB ist, und also ob A näher bey oder weiter von B fällt als D, wenn beyde A und D auf einer Seite von B liegen. Nun ist auch BPA gegeben. Daraus, ob solcher spitz oder stumpf ist, sieht man, ob D und A auf verschiedenen oder auf einer Seite von B liegen.

10. Fall. Auf eben die Frage eben die Antwort.

11. Fall. Art des gesuchten Winkels? Aus §. 184.

Sechstes Kapitel.

Ableitung allgemeiner analytischer sphärisch-trigonometrischer Formeln nebst einigen Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie.

§. 197.

Wir haben hier zuerst von rechtwinklichten sphärischen Dreyecken gehandelt und für schiefwinklichte Dreyecke auf die Art Proportionen hergeleitet, daß man sich letztere durch Perpendikel in rechtwinklichte getheilt denkt. Man kann aber auch einen andern Weg gehen, nämlich allgemeine Formeln aufsuchen, die für jedes beliebige sphärische Dreyeck gelten und unter gewissen Abänderungen auch auf das rechtwinklichte angewandt werden können. Da es nützlich zu sehen, wie sich das Besondere aus dem Allgemeinen herleiten läßt, so soll hier kürzlich gezeigt werden, wie man allgemeine Formeln für jedes Kugeldreyeck und aus diesen besondere für rechtwinklichte herleiten kann.

§. 198.

Man fälle von C Fig. 88. die Perpendikularen CD, CE und CF und ziehe DE und DF,

DF, welche senkrecht auf SA und SB sind (§. 161.); folglich sind CED und CFD die Neigungswinkel der Ebenen CSA und CSB auf ASB, oder CED = A und CFD = B. Man nenne CB = a, AB = c, AC = b.

Nun ist CE = Sin. b, SE = Cos. b,
CF = Sin. a, SF = Cos. a.

In dem bey D rechtwinklichten Dreyeck CDE, dessen Winkel E = A ist, hat man

CD = CE . Sin. CED = Sin. b . Sin. CED
= Sin. b . Sin. A .
DE = CE . Cos. CED = Sin. b . Cos. A.

In dem bey D rechtwinklichten Dreyeck CDF, dessen Winkel CFD = B ist, hat man

CD = CF . Sin. CFD = Sin. a . Sin. B

und

DF = CF . Cos. CFD = Sin. a . Cos. B.

Man setze die Werthe von CD gleich, so ist

I. Sin. b . Sin. A = Sin. a . Sin. B, oder
Sin. b : Sin. a = Sin. B : Sin. A.

Das heißt: Die Sinus der Seiten verhalten sich wie die Sinus der Winkel, die ihnen gegenüberliegen.

Folg=

Folglich auch

Sin. c : Sin. a = Sin. C : Sin. A und
Sin. c : Sin. b = Sin. C : Sin. B, folglich
Sin. c . Sin. A = Sin. a . Sin. C und
Sin. c . Sin. B = Sin. b . Sin. C.

Durch den Punct E ziehe man die Linie EG senkrecht auf SB und durch D die Linie DH parallel mit SB. Auf die Art entsteht das rechtwinklichte Dreyeck DHE, dessen Winkel HED = ASB. Nämlich:

HED = SED – GES, weil aber SED = R, so ist
HED = R – GES. Aber
ASB = R – GES, weil bey G rechte Winkel, folglich
HED = ASB.

In dem bey H rechtwinklichten Dreyeck DHE ist DH = DE . Sin. DEH
= DE . Sin. c (weil DEH = ASB = AB = c ist)
= Cos. A . Sin. b . Sin. c (weil DE = Cos. A . Sin. b).

Aber SF = Cos. a = SG + GF = SG + HD und SG = SE . Cos. ESG = Cos. b . Cos. c, folglich

II. Cos. a = Cos. b . Cos. c + Cos. A . Sin. b . Sin. c (wenn man die Werthe von SG und DH substituirt).

Man findet also in einem jeden sphärischen Dreyeck ABC aus zwey gegebenen Seiten b, c, nebst dem eingeschlossenen Winkel A die dritte Seite a, wenn man

1) die Cosinus der beyden gegebenen Seiten mit einander multiplicirt, also Cos. b . Cos. c.

2) ein Product formirt aus den Sinus der gegebenen Seiten und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels, also Cos. A . Sin. b . Sin. c.

3) diese Producte addirt, also Cos. a = Cos. b . Cos. c + Cos. A . Sin. b . Sin. c.

Eben so hat man

Cos. b = Cos. a . Cos. c + Cos. B . Sin. a . Sin. c und

Cos. c = Cos. a . Cos. b + Cos. C . Sin. a . Sin. b.

Diese 3 Gleichungen drücken also das Verhältniß zwischen je zwey gegebenen Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel und der genüberliegenden Seite aus.

§. 199.

Aus den angeführten drey Gleichungen werden folgende:

III. $\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c}}$,

$\text{Cos. B} = \frac{\text{Cos. b} - \text{Cos. a} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. a} \cdot \text{Sin. c}}$ und

$\text{Cos. C} = \frac{\text{Cos. c} - \text{Cos. a} \cdot \text{Cos. b}}{\text{Sin. a} \cdot \text{Sin. b}}$.

Diese Formel lehrt, aus den drey gegebenen Seiten eines jeden sphärischen Dreyecks einen Winkel zu finden, wobey man nur bemerken muß, daß der Divisor das Product der Sinus derjenigen Seiten enthält, die den gesuchten Winkel einschließen; im Dividendus aber das Product der Cosinus der einschließenden Seiten vom Cosinus des gegenüberliegenden subtrahirt wird. Oben (§. 151.) ist diese Formel auf eine andere Art gefunden worden.

§. 200.

Weil $\text{Sin. A}^2 = 1 - \text{Cos. A}^2$, $\text{Sin. B}^2 = 1 - \text{Cos. B}^2$ und $\text{Sin. C}^2 = 1 - \text{Cos. C}^2$, so hat man, wenn man für Cos. A^2, Cos. B^2, Cos. C^2 obige Werthe setzt; Sin. A^2

$$= 1 - \frac{\text{Cos. a}^2 - 2\,\text{Cos. a} \cdot \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c} + \text{Cos. b}^2 \cdot \text{Cos. c}^2}{\text{Sin. b}^2 \cdot \text{Sin. c}^2}$$

$$= \frac{\text{Sin. b}^2 \cdot \text{Sin. c}^2 - \text{Cos. a}^2 + 2\,\text{Cos. a} \cdot \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c} - \text{Cos. b}^2 \cdot \text{Cos. c}^2}{\text{Sin. b}^2 \cdot \text{Sin. c}^2}$$

Aber $\text{Sin. } b^2 = 1 - \text{Cof. } b^2$ und $\text{Sin. } c^2 = 1 - \text{Cof. } c^2$, folglich

$$\text{Sin. } A^2 = \frac{(1 - \text{Cof. } b^2) \cdot (1 - \text{Cof. } c^2) - \text{Cof. } b^2 \cdot \text{Cof. } c^2 - \text{Cof. } a^2 + 2\,\text{Cof. } a \cdot \text{Cof } b \cdot \text{Cof. } c}{\text{Sin. } b^2 \cdot \text{Sin. } c^2}$$

Wenn man $1 - \text{Cof. } b^2$ mit $1 - \text{Cof } c^2$ multiplicirt, so bekommt man $1 - \text{Cof. } b^2 - \text{Cof. } c^2 + \text{Cof. } b^2 \cdot \text{Cof. } c^2$, folglich $\text{Sin. } A^2$

$$= \frac{1 - \text{Cof. } b^2 - \text{Cof. } c^2 + \text{Cof. } b^2 \cdot \text{Cof. } c^2 - \text{Cof. } b^2 \cdot \text{Cof. } c^2 - \text{Cof. } a^2 + 2\,\text{Cof. } a \cdot \text{Cof. } b \cdot \text{Cof. } c}{\text{Sin. } b^2 \cdot \text{Sin. } c^2}$$

$$= \frac{1 - \text{Cof. } b^2 - \text{Cof. } c^2 - \text{Cof. } a^2 + 2\,\text{Cof. } a \cdot \text{Cof. } b \cdot \text{Cof. } c}{\text{Sin. } b^2 \cdot \text{Sin. } a^2}$$

$$= \frac{\text{Sin. } a^2 (1 - \text{Cof. } b^2 - \text{Cof. } c^2 - \text{Cof. } a^2 + 2\,\text{Cof. } a \cdot \text{Cof. } b \cdot \text{Cof. } c)}{\text{Sin. } a^2 \cdot \text{Sin. } b^2 \cdot \text{Sin. } c^2}$$

$$\text{Sin. } A = \sqrt{\frac{\text{Sin. } a^2 (1 - \text{Cof } b^2 - \text{Cof. } c^2 - \text{Cof. } a^2 + 2\,\text{Cof. } a \cdot \text{Cof. } b \cdot \text{Cof. } c)}{\text{Sin. } a^2 \cdot \text{Sin. } b^2 \cdot \text{Sin. } c^2}}$$

$$= \frac{\text{Sin. } a \cdot \sqrt{(1 - \text{Cof. } b^2 - \text{Cof. } c^2 - \text{Cof. } a^2 + 2\,\text{Cof. } a \cdot \text{Cof. } b \cdot \text{Cof. } c)}}{\text{Sin. } a \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c}$$

Man nenne den Factor rechter Hand N, so ist

$$\text{Sin. } A = N \cdot \text{Sin. } a.$$

Auf die nämliche Art findet man $\text{Sin. } B = N \cdot \text{Sin. } b$ und $\text{Sin. } C = N \cdot \text{Sin. } c$, folglich

$$\frac{\text{Sin. } A}{\text{Sin. } a} = N,$$

$$\frac{\text{Sin. } B}{\text{Sin. } b} = N,$$

$$\frac{\text{Sin. } C}{\text{Sin. } c} = N,$$ und, wenn man die Werthe von N gleich setzt,

$\frac{\text{Sin. A}}{\text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. b}} = \frac{\text{Sin. C}}{\text{Sin. c}}$, folglich

Sin. A . Sin. b = Sin. B . Sin. a, und
Sin. B . Sin. c = Sin. C . Sin. b, und
Sin. A . Sin. c = Sin. C . Sin. a, wie §. 198. I.

Man ersieht hieraus, daß der eine Factor, nämlich der rechter Hand, für jeden Winkel der nämliche bleibt; der andere aber für Sin. B sich in Sin. b. und für Sin. C sich in Sin. c verwandelt.

§. 201.

Die Gleichungen §. 200. dienen zur Auflösung eines jeden beliebigen sphärischen Dreyecks, wenn drey Stücke desselben gegeben sind.

Es lassen sich mit erwähnten Gleichungen noch einige Veränderungen machen, wodurch die Anwendung derselben erleichtert wird.

1) Man eliminire Cos. a aus den Gleichungen für Cos. b und Cos. c, indem man in diese den Werth für Cos. a setzt, so hat man

Cos. b = Cos. b . Cos. c^2 + Cos. A . Sin. b . Sin. c . Cos. c + Cos. B . Sin. a . Sin. c, und

Cos. c = Cos. b^2 . Cos. c + Cos. A . Sin. b . Sin. c . Cos. b + Cos. C . Sin. a . Sin. b.

2) In diese Gleichungen bringe man statt

Cof. c^2 den Werth $1 - \text{Sin. } c^2$, und ſtatt Cof. b^2 den Werth $1 - \text{Sin. } b^2$, ſo hat man

a) $\text{Cof. } b = \text{Cof. } b\ (1 - \text{Sin. } c^2) + \text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c \cdot \text{Cof. } c + \text{Cof. } B \cdot \text{Sin. } a \cdot \text{Sin. } c$, und

b) $\text{Cof. } c = \text{Cof. } c\ (1 - \text{Sin. } b^2) + \text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c \cdot \text{Cof. } b + \text{Cof. } C \cdot \text{Sin. } a \cdot \text{Sin. } b.$

a) $\text{Cof. } b = \text{Cof. } b - \text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } c^2 + \text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c \cdot \text{Cof. } c + \text{Cof. } B \cdot \text{Sin. } a \cdot \text{Sin. } c.$

$\text{Cof. } b - \text{Cof. } b = o = -\text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } c^2 + \text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c \cdot \text{Cof. } c + \text{Cof. } B \cdot \text{Sin. } a \cdot \text{Sin. } c.$

$= -\text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } c + \text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Cof. } c + \text{Cof. } B \cdot \text{Sin. } a.$

$\text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } c = \text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Cof. } c + \text{Cof. } B \cdot \text{Sin. } a.$

Aus b wird $\text{Sin. } b \cdot \text{Cof. } c - \text{Cof. } A \cdot \text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } c = \text{Cof. } C \cdot \text{Sin. } a$ auf eben die Art.

3) Wenn man die zweyte Gleichung mit Cof. A multiplicirt, ſo hat man

$\text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Cof. } c - \text{Cof. } A^2 \cdot \text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } c = \text{Cof. } A \cdot \text{Cof. } C \cdot \text{Sin. } a.$

$\text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } c - \text{Cof. } A \cdot \text{Sin. } b \cdot \text{Cof. } c = \text{Cof. } b \cdot \text{Sin. } a$, addirt.

4) Cos. A . Sin. b . Cos. c – Cos. A^2 . Cos, b . Sin. c + Cos. b . Sin. c – Cos. A . Sin. b . Cos. c = Cos. A . Cos. C . Sin. a + Cos. B . Sin. a, oder

Cos. A . Sin. b . Cos. c — Cos. b . Sin. c (1 – Sin. A^2) + Cos. b . Sin. c – Cos. A . Sin. b . Cos. c = Cos. A . Cos. C . Sin. a + Cos. B . Sin. a.

Cos. A . Sin, b . Cos. c — Cos. b . Sin. c + Cos. b . Sin. c . Sin. A^2 + Cos. b . Sin. c — Cos. A . Sin. b . Sin. c – Cos. A . Sin. b . Cos. c = Cos. A . Cos. C . Sin. a + Cos. B . Sin. a,

oder, wenn man aufhebt,

Cos. b . Sin. c . Sin. A^2 = Cos. A . Cos. C . Sin. a + Cos. B . Sin. a.

Sin. A^2 . Cos. b . Sin. = (Cos. B + Cos. A . Cos. C) Sin. a.

5) Aber Sin. c . Sin. A = Sin. a . Sin. C und der Theil linker Hand läßt sich auch so ausdrücken: Sin. c . Sin. A . Sin. A . Cos. b = Sin. a . Sin. C . Sin. A . Cos. b; folglich

Sin. a . Sin. C . Sin. A . Cos. b = (Cos. B + Cos. A . Cos. C) Sin. a, und

Cos. b . Sin. A . Sin. C = Cos. B + Cos. A . Cos, C, und

— Cos. A . Cos. C + Cos. b . Sin. A . Sin. C = Cos. B.

6)

6) Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung §. 201. a) so beweißt dies, daß jene aus dieser sich herleiten läßt, wenn man alle kleine Buchstaben der Gleichung

$$\text{Cos. b} = \text{Cos. a} \,.\, \text{Cos. c} + \text{Cos. B} \,.\, \text{Sin. a} \,.\, \text{Sin. c}$$

in große, und die großen in kleine verwandelt, und allen Cosinus das Zeichen — giebt, alsdann hat man

$$-\text{Cos. B} = -\text{Cos. A} \,.\, -\text{Cos. C} - \text{Cos. b} \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C},$$ d. h.

$$-\text{Cos. B} = \text{Cos. A} \,.\, \text{Cos. C} - \text{Cos. b} \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C},$$

7) welche Gleichung mit obiger (5) einerley ist, wie man leicht einsieht, wenn man letztere mit -1 multiplicirt und sie gleichförmig stellt.

§. 202.

Die Gleichung, $\text{Cos. B} = -\text{Cos. A} \,.\, \text{Cos. C} + \text{Cos. b} \,.\, \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C}$ bestimmt also aus zwey Winkeln und der zwischen ihnen liegenden Seite den Winkel, der der gegebenen Seite gegenüber liegt. Folglich auch

$$\text{Cos. A} = -\text{Cos. B} \,.\, \text{Cos. C} + \text{Cos. a} \,.\, \text{Sin. B} \,.\, \text{Sin. C}, \text{ und}$$

$$\text{Cos. C} = -\text{Cos. B} \,.\, \text{Cos. A} + \text{Cos. c} \,.\, \text{Sin. B} \,.\, \text{Sin. A}.$$

Um

Um also aus zwey Winkeln und der eingeschlossenen Seite den dieser Seite gegenüber liegenden Winkel zu finden, muß man

1) ein Product formiren aus den Sinus der beyden gegebenen Winkel in den Cosinus der gegebenen Seite;
2) ein Product aus den Cosinus der gegebenen Winkel;
3) letzteres Product vom ersteren subtrahiren: so hat man den Cosinus des gesuchten Winkels.

§. 203.

Weil negative Cosinus der Bogen a, b, c, und der Winkel A, B, C, ihren Supplementen oder Ergänzungen zu 180° angehören, also $-\text{Cos. a} = \text{Cos. } (180° - a)$ und $-\text{Cos. A} = \text{Cos. A } (180° - A)$ ist, so hat man, wenn man $180° - a = a'$ und $170° - A = A'$ setzt oder damit bezeichnet, und diese Werthe in obige Gleichungen bringt, folgende Gleichungen:

$$\text{Cos. } A' = \text{Cos. } B' \cdot \text{Cos. } C' + \text{Cos. } a' \cdot \text{Sin. } B' \cdot \text{Sin. } C'$$

$$\text{Cos. } B' = \text{Cos. } A' \cdot \text{Cos. } C' + \text{Cos. } b' \cdot \text{Sin. } A' \cdot \text{Sin. } C'$$

$$\text{Cos. } C' = \text{Cos. } A' \cdot \text{Cos. } B' + \text{Cos. } c \cdot \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B.$$

Diese

Diese Gleichungen haben vollkommene Aehnlichkeit mit obigen Gleichungen II.

$$\text{Cos.a} = \text{Cos.b} \,.\, \text{Cos.c} + \text{Cos.A} \,.\, \text{Sin.b} \,.\, \text{Sin.c}$$
$$\text{Cos.b} = \text{Cos.a} \,.\, \text{Cos.c} + \text{Cos.B} \,.\, \text{Sin.a} \,.\, \text{Sin.c}$$
$$\text{Cos.c} = \text{Cos.a} \,.\, \text{Cos.b} + \text{Cos.c} \,.\, \text{Sin.a} \,.\, \text{Sin.b}$$

und gehören also einem Dreyeck an, dessen Seiten a′, b′, c′ und dessen Winkel A′, B′, C′ sind. Ein solches Dreyeck hat Winkel, die den Supplementen der Seiten des Dreyecks ABC, und Seiten, die den Supplementen der Winkel des nämlichen Dreyecks gleich sind; ein solches Dreyeck nennt man das Supplement-Dreyeck des Dreyecks ABC.

§. 204.

Die obigen Gleichungen, nämlich

$$\text{Cos.B} \,.\, \text{Sin.a} = \text{Cos.b} \,.\, \text{Sin.c} - \text{Cos.A} \,.\, \text{Sin.b} \,.\, \text{Cos.c}, \text{ und}$$
$$\text{Cos.C} \,.\, \text{Sin.a} = \text{Sin.b} \,.\, \text{Cos.c} - \text{Cos.A} \,.\, \text{Cos.b} \,.\, \text{Sin.c},$$

welche 5 Stücke des sphärischen Dreyecks enthalten, lassen sich in andere verwandeln, welche nur 4 enthalten.

Substituirt man nämlich für Sin.a in der ersten Gleichung den Werth $\frac{\text{Sin.b} \,.\, \text{Sin.A}}{\text{Sin.B.}}$, und in der zweyten $\frac{\text{Sin.c} \,.\, \text{Sin.A}}{\text{Sin.C.}}$, und da $\frac{\text{Cos.x}}{\text{Sin.x}} = \text{Cot.x}$ ist, so hat man

Cot.

$$\frac{\text{Cot. B . Sin. B . Sin. b . Sin. A}}{\text{Sin. B}} = \text{Cos. b . Sin. c}$$

$$- \text{Cos. A . Sin. b . Cos. c, und}$$

$$\text{Cot. B . Sin. b . Sin. A} = \text{Cos. b . Sin. c}$$

$$- \text{Cos. A . Sin. b . Cos. c, und}$$

$$\text{Cot. B} = \frac{\text{Cos. B . Sin. c} - \text{Cos. A . Sin. b . Cos. c}}{\text{Sin. b . Sin. A}}$$

$$\text{Eben so Cot. C} = \frac{\text{Sin. b . Cos. c} - \text{Cos. A . Cos. b . Sin. c}}{\text{Sin. A . Sin. c}}.$$

Da diese Gleichungen von den zu Anfange dieses Paragraphen angeführten Gleichungen abgeleitet sind, so könnte man in diesen eben so wie in jenen die Seiten in Winkel, und umgekehrt, verwandeln, und den Cosinus und Cotangenten das entgegengesetzte Zeichen von dem geben, was sie haben. Auf die Art wird man folgende Gleichungen bekommen:

$$\text{Cot. b} = \frac{\text{Cos. B . Sin. C} + \text{Cos. a . Sin. B . Cos. C}}{\text{Sin. a . Sin. B}}$$

$$\text{Cot. c} = \frac{\text{Sin. B . Cos. C} + \text{Cos. a . Cos. B . Sin. C}}{\text{Sin a . Sin. C}}.$$

§. 205.

Diese fünf Systeme von Gleichungen führen unmittelbar zur Auflösung aller Fälle, die bey jedem beliebigen sphärischen Dreyeck vorkommen können.

A) Das erste System: $\text{Sin. b . Sin. A} = \text{Sin a . Sin. B}$ bestimmt das Verhältniß zwischen den Winkeln und gegenüber liegenden Seiten.

B)

B) Aus dem zweyten System: Cos. a = Cos. b . Cos. c + Cos. A . Sin. b . Sin. c lassen sich folgende 6 Formeln herleiten:

1) $\text{Cos. a} = \text{Cos. b} . \text{Cos. c} + \text{Cos. A} . \text{Sin. b} . \text{Sin. c}$

2) $\text{Cos. b} = \text{Cos. a} . \text{Cos. c} + \text{Cos. B} . \text{Sin. a} . \text{Sin. c}$

3) $\text{Cos. c} = \text{Cos. a} . \text{Cos. b} + \text{Cos. C} . \text{Sin. a} . \text{Sin. b}$

4) $\text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} . \text{Cos. c}}{\text{Sin. b} . \text{Sin. c}}$

5) $\text{Cos. B} = \frac{\text{Cos. b} - \text{Cos. a} . \text{Cos. c}}{\text{Sin. a} . \text{Sin. c}}$

6) $\text{Cos. C} = \frac{\text{Cos. c} - \text{Cos. c} . \text{Cos. b}}{\text{Sin. a} . \text{Sin. h.}}$.

Die drey ersten Gleichungen lehren aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die gegenüber liegende Seite finden; vermittelst der drey letzten lassen sich aus den Seiten die Winkel bestimmen.

§. 206.

Das dritte System giebt ebenfalls 6 Formeln

1) $\text{Cos. A} = -\text{Cos. B} . \text{Cos. C} + \text{Sin. B} . \text{Sin. C} . \text{Cos. a}$

2) $\text{Cos. B} = -\text{Cos. A} . \text{Cos. C} + \text{Sin. A} . \text{Sin. C} . \text{Cos. b}$

3) $\text{Cos. C} = -\text{Cos. A} . \text{Cos. B} + \text{Sin. A} . \text{Sin. B} . \text{Cos. c}$

4) $\text{Cos. a} = \frac{\text{Cos. A} + \text{Cos. B} . \text{Cos. C}}{\text{Sin. B} . \text{Sin. C.}}$

5) $\text{Cos. b} = \frac{\text{Cos. B} + \text{Cos. A} . \text{Cos. C}}{\text{Sin. A} . \text{Sin. C}}$

6) $\text{Cos. c} = \frac{\text{Cos. C} + \text{Cos A} . \text{Cos. B}}{\text{Sin. A} . \text{Sin. B.}}$.

Die drey ersten Formeln lehren einen Winkel

fin=

finden, wenn die beyden andern und die zwischen liegende Seite bekannt sind; aus den 3 letzten findet man aus 3 bekannten Winkeln eine Seite.

§. 207.

Das vierte System giebt 6 Formeln

$$\text{Cot. A} = \frac{\text{Cos. a . Sin. b} - \text{Cos. C . Sin. a . Cos. b}}{\text{Sin. C . Sin. a}}$$

$$\text{Cot. B} = \frac{\text{Sin. a . Cos. b} - \text{Cos. C . Cos. a . Sin. b}}{\text{Sin. C . Sin. b}}$$

$$\text{Cot. A} = \frac{\text{Cos. a . Sin. c} - \text{Cos. B . Sin. a . Cos. c}}{\text{Sin. B . Sin. a}}$$

$$\text{Cot. C} = \frac{\text{Cos. a . Sin. c} - \text{Cos. B . Cos. a . Sin. c}}{\text{Sin. B . Sin. c}}$$

$$\text{Cot. B} = \frac{\text{Cos. b . Sin. c} - \text{Cos. A . Sin. b . Cos. c}}{\text{Sin. A . Sin. b}}$$

$$\text{Cot. C} = \frac{\text{Sin. b . Cos. c} - \text{Cos. A . Cos. b . Sin. c}}{\text{Sin. A . Sin. c}}.$$

Durch Hülfe dieser Formeln findet man aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel einen andern Winkel.

§. 208.

Das fünfte System von Gleichungen führt zu folgenden Formeln:

$$\text{Cot. a} = \frac{\text{Cos. A . Sin. B} + \text{Cos. c . Sin. A . Cos. B}}{\text{Sin. c . Sin. A}}$$

$$\text{Cot. b} = \frac{\text{Sin. A . Cos. B} + \text{Cos. c . Cos. A . Sin. B}}{\text{Sin. c . Sin. B}}$$

$$\text{Cot. a} = \frac{\text{Cos. A . Sin. C} + \text{Cos. b . Sin. A . Cos. C}}{\text{Sin. b . Sin. A}}$$

Cot.

$$\text{Cot. } c = \frac{\text{Sin. A . Cos. C} + \text{Cos. b . Cos A . Sin. C}}{\text{Sin. b . Sin. C}}$$

$$\text{Cot. } b = \frac{\text{Cos. B . Sin. C} + \text{Cos. a . Sin. B . Cos. C}}{\text{Sin. a . Sin. B}}$$

$$\text{Cot: } c = \frac{\text{Sin. B . Cos. C} + \text{Cos. a . Cos. B . Sin. C}}{\text{Sin. a . Sin. C}}.$$

Diese Formeln lehren, aus zwey gegebenen Winkeln und einer zwischenliegenden Seite eine gegenüber liegende Seite finden.

§. 209.

Die fünf Systeme von Formeln, die hier angeführt worden, sind hauptsächlich deswegen so merkwürdig, weil sie zugleich zu erkennen geben, ob der gefundene Bogen oder Winkel kleiner oder größer, als ein Quadrant, oder gleich einem Quadrant ist, welches bey solchen Ausdrücken nicht der Fall ist, in welchem der Sinus des gesuchten Bogens oder Winkels vorkommt. Da nämlich der Sinus eines Bogens oder Winkels auch zugleich dem Supplemente des Bogens oder Winkels angehört, sowohl was dessen Größe als dessen Zeichen anbetrifft, so ist es, so oft man nur den Sinus eines Bogens oder Winkels kennt, nicht möglich zu entscheiden, ob der Bogen oder Winkel, dessen Sinus gefunden ist, spitz oder der stumpfe Supplementsbogen ist. Enthalten aber die Formeln den Cosinus oder die Cotangenten, und weiß man überdies, daß die

Sei:

Seiten oder Winkel des sphärischen Dreyecks nicht 180° übersteigen, so kann man an dem Zeichen des Resultats erkennen, ob der gefundene Bogen oder Winkel spitz, oder der stumpfe Supplementsbogen oder Supplementswinkel ist. Der Cosinus und die Cotangente haben nämlich für Bogen und Winkel, die kleiner als 90° sind, das Zeichen +, oder sind positiv, und für Bogen und Winkel, die 90° übersteigen, das Zeichen —, oder sind negativ. Giebt man also den bekannten Größen, die in den Formeln vorkommen, dasjenige Zeichen, welches ihnen nach der Beschaffenheit der Bogen oder Winkel zukommt, so kann man am Zeichen des Resultats erkennen, wie der gefundene Bogen oder Winkel beschaffen ist, d. h. der gefundene Bogen oder Winkel ist spitz oder stumpf, je nachdem das Zeichen des Cosinus oder der Cotangente des gefundenen Stücks positiv oder negativ ist.

§. 210.

Diese nämlichen Formeln nun vereinfachen sich sehr, wenn das gegebene Dreyeck rechtwinklicht oder einer seiner Winkel ein rechter ist; denn $C = 90°$ giebt Sin. $C = 1$ und Cos. $C = 0$, und die obigen Formeln

$$\text{Sin: } c \cdot \text{Sin. } A = \text{Sin. } a \cdot \text{Sin. } C, \text{ und}$$
$$\text{Sin. } c \cdot \text{Sin. } B = \text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } C$$

ver-

verwandeln sich in

$$\text{Sin. c} \,.\, \text{Sin. A} = \text{Sin. a}$$
$$\text{Sin. c} \,.\, \text{Sin. B} = \text{Sin. b.}$$

Eben so die Formel

$$\text{Cos. c} = \text{Cos. a} \,.\, \text{Cos. b} + \text{Cos. C} \,.\, \text{Sin. a} \,.\, \text{Sin. b};$$

indem nämlich nun $C = 90°$, so ist $\text{Cos. C} = 0$, folglich fällt der zweyte Theil rechter Hand weg, weil ein Product verschwindet, wenn dessen einer Factor $= 0$ wird; folglich

$$\text{Cos. c} = \text{Cos. a} \,.\, \text{Cos. b.}$$

So auch die obige Formel

$$\text{Cos. c} = \frac{\text{Cos. C} + \text{Cos. A} \,.\, \text{Cos. B}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. B}}, \text{ aber } \text{Cos. C} = 0,$$

also

$$\text{Cos. c} = \frac{\text{Cos. A} \,.\, \text{Cos. B}}{\text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. B}}, \quad \text{aber } \frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}} = \text{Cot. A},$$

folglich

$$\text{Cos. c} = \text{Cot. A} \,.\, \text{Cot, B.}$$

Die Formeln

$$\text{Cos. A} = -\text{Cos. B} \,.\, \text{Cos. C} + \text{Sin. B} \,.\, \text{Sin. C} \,.\, \text{Cos. a}$$
$$\text{Cos. B} = -\text{Cos. A} \,.\, \text{Cos. C} + \text{Sin. A} \,.\, \text{Sin. C} \,.\, \text{Cos. b}$$

verändern sich folgendergestalt. Weil nämlich $\text{Cos. C} = 0$, so fällt der erste Theil rechter Hand weg, und weil $\text{Sin. C} = 1$, so wird in der ersten Formel der zweyte Theil rechter Hand $\text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. a}$, folglich hat man

$$\text{Cos. A} = \text{Sin. B} \,.\, \text{Cos. a}, \text{ und}$$
$$\text{Cos. B.} = \text{Sin. A} \,.\, \text{Cos. b.}$$

Eben

Eben so werden aus den Formeln

$$\text{Cot. b} = \frac{\text{Cos. B . Sin. C} + \text{Cos a . Sin. B . Cos. C}}{\text{Sin. a . Sin. B}}$$

$$\text{Cot. a} = \frac{\text{Cos. A . Sin. C} + \text{Cos. b . Sin. A . Cos. C}}{\text{Sin. b . Sin. A}}$$

$$\text{Cot. c} = \frac{\text{Cos. A . Cos. C} + \text{Cos. b . Cos. A . Sin. C}}{\text{Sin b . Sin. C}}$$

$$\text{Cot. c} = \frac{\text{Sin. B . Cos. C} + \text{Cos. a . Cos. B . Sin. C}}{\text{Sin. a . Sin. C.}}$$

wenn man Sin. C = 1 setzt und die Theile verschwinden läßt, in welchem Sin. C = o vorkommt, folgende andere

$$\text{Cot. b} = \frac{\text{Cos B}}{\text{Sin. a . Sin. B}}$$

$$\text{Cot: a} = \frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. b . Sin. A}}$$

$$\text{Cot. c} = \frac{\text{Cos. b . Cos. A}}{\text{Sin. b}}$$

$$\text{Cot. c} = \frac{\text{Cos a . Cos. B}}{\text{Sin. a.}}$$

Diese Formeln lassen sich noch auf eine andere Weise ausdrücken, wenn man $\frac{\text{Cos. B}}{\text{Sin. B}} = \text{Cot. B}$ u. s. w., und $\text{Cot. b} = \frac{1}{\text{Tang. b}}$ u. s. w. setzt.

Alsdenn bekommt man

$$\frac{1}{\text{Tang. b}} = \frac{\text{Sin. a . Cot. B}}{1} \quad \text{und}$$

$$\text{Tang. b} = \frac{1}{\text{Sin. a . Cot. B}}, \quad \text{und}$$

$$\text{Tang. b} = \text{Sin. a} \cdot \frac{1}{\text{Cot. B}}$$

$$= \text{Sin. a . Tang. B.}$$

Auf

Auf die nämliche Art findet man

$$\text{Tang. a} = \text{Sin. b} \;.\; \text{Tang. A}$$
$$\text{Tang. c} = \text{Cof. A} \;.\; \text{Tang. b}, \text{ und}$$
$$\text{Tang. c} = \text{Cof. B} \;.\; \text{Tang. a.}$$

Benennt man in den Figuren 78 und 81 die Seiten eben so wie hier, mit den kleinen Buchstaben der gegenüber liegenden Winkel, und verwandelt die obigen Proportionen in Gleichungen, so müssen diese mit den hier gefundenen übereinstimmen, wobey jedoch noch bemerkt werden muß, daß hier C $= 90°$, dorten aber B $= 90°$, folglich müssen C und B verwechselt werden.

Z. B. der 122. §. giebt

$$r : \text{Sin. CA} = \text{Sin. A} : \text{Sin. CB}, \text{ oder}$$
$$1 : \text{Sin. b} = \text{Sin. A} : \text{Sin. a}, \text{ folglich}$$
$$\text{Sin a} = \text{Sin. b} \;.\; \text{Sin. A.}$$

Selbst wenn nun statt Sin. b . Sin. c, so hat man

$$\text{Sin. a} = \text{Sin. c} \;.\; \text{Sin. A.}$$

Beyde Formeln stimmen also überein, und so auch die übrigen, für rechtwinklichte Dreyecke.

§. 211.

Diese fünf Systeme von Gleichungen enthalten alles, was zur Auflösung eines jeden sphärischen Dreyecks erfordert wird. Um indeß bey den Berechnungen der sphärischen Dreyecke die Logarithmen

bequemer gebrauchen zu können, wird es dienlich seyn, mit den Formeln der vier letzten Systeme noch einige Veränderungen vorzunehmen, um die Summen und Differenzen, die in denselben vorkommen, in Producte und Quotienten zu verwandeln.

In dem 2ten System der Gleichungen findet man

$$1)\ \text{Cos. A} = \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c}}.$$

Hieraus wird

$$1 + \text{Cos. A} = 1 + \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. b Sin. c}}$$

$$= \frac{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c} + \text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c}}$$

$$= \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. (b + c)}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c}} \quad (\S.\ 75.\ F.\ 19).$$

Ferner $1 - \text{Cos. A} = 1 - \frac{\text{Cos. a} - \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c}}$

$$= \frac{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c} - \text{Cos. a} + \text{Cos. b} \cdot \text{Cos. c}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c}}$$

$$= \frac{\text{(Cos. b - c)} - \text{Cos. c}}{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. c}} \quad (\S.\ 75.\ F.\ 20).$$

Man dividire die zweyte Gleichung durch die erste, so hat man

$$\frac{1 - \text{Cos. A}}{1 + \text{Cos, A}} = \frac{\text{Cos. (b - c)} - \text{Cos. a}}{\text{Cos. a} - \text{Cos. (b + c)}}.$$

Aber $\frac{1 - \text{Cos. A}}{1 + \text{Cos, A}} = \text{Tang.}\ \frac{1}{2}\ A^2$ $(\S.\ 75.\ F.\ 39)$, also

$$\text{Tang,}\ \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\text{Cos. (b - c)} - \text{Cos. a}}{\text{Cos. a} - \text{Cos. (b + c)}}.$$

Aber §75. F. 30 ist Cos. y − Cos. x = 2 Sin. $\frac{1}{2}$ (y + x). Sin. $\frac{1}{2}$ (x − y), oder Cos. x − Cos. y = − 2 Sin. $\frac{1}{2}$

$(x+y) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(x-y)$. Man ſetze $b-c$ ſtatt x und a ſtatt y, ſo hat man

$$\text{Cof.}(b-c) - \text{Cof.}\,a = -2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c+a) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c-a), \text{ und}$$

$$\text{Cof.}\,a - \text{Cof.}(b+c) = -2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b-c).$$

$$\text{Folglich Tang.}\frac{1}{2}A^2 = \frac{\text{Cof.}(b-c) - \text{Cof.}\,a}{\text{Cof.}\,a - \text{Cof.}(b+c)} = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c+a) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c-a)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b-c)}.$$

§. 212.

Die erſte von den Gleichungen des dritten Syſtems giebt

$$2)\quad \text{Cof.}\,a = \frac{\text{Cof.}\,A + \text{Cof.}\,B \cdot \text{Cof.}\,C}{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C} \text{ und}$$

$$1 + \text{Cof.}\,a = \frac{1 + \text{Cof.}\,A + \text{Cof.}\,B \cdot \text{Cof.}\,C}{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C} = \frac{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C + \text{Cof.}\,B \cdot \text{Cof.}\,C + \text{Cof.}\,A}{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C} = \frac{\text{Cof.}(B-C) + \text{Cof.}\,B}{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C}.$$ Ferner

$$1 - \text{Cof.}\,a = 1 - \frac{\text{Cof.}\,A + \text{Cof.}\,B \cdot \text{Cof.}\,C}{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C} = \frac{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C - \text{Cof.}\,B \cdot \text{Cof.}\,C - \text{Cof.}\,A}{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C} = -\frac{\text{Cof.}(B+C) + \text{Cof.}\,A}{\text{Sin.}\,B \cdot \text{Sin.}\,C}, \text{ und}$$

$$\frac{1-\text{Cof.}\,a}{1+\text{Cof.}\,a} = \text{Tang.}\frac{1}{2}a^2 = -\frac{\text{Cof.}(B+C) + \text{Cof.}\,A}{\text{Cof.}(B-C) + \text{Cof.}\,A} \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C+A) \cdot \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(B-C+A) \cdot \text{Cof.}\frac{1}{2}(B-C-A)}}.$$

§. 213.

§. 213.

Die Gleichungen II geben

3) $\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c} = \text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c} \cdot \text{Cos.A}$ und

$\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c} = \text{Sin.a} \cdot \text{Sin.c} \cdot \text{Cos.B}$.

Man dividire die erste Gleichung durch die zweyte

$$\frac{\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c}}{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c}} = \frac{\text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c} \cdot \text{Cos.A}}{\text{Sin.a} \cdot \text{Sin.c} \cdot \text{Cos.B}}.$$

Aus I ist $\frac{\text{Sin.b}}{\text{Sin.a}} = \frac{\text{Sin.B}}{\text{Sin.A}}$. Diesen Werth bringe man in die Gleichung, so hat man

$$\frac{\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c}}{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c}} = \frac{\text{Sin.B} \cdot \text{Cos.A}}{\text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B}},$$ wenn man rechter Hand durch Sin.c dividirt.

Man addire auf beyden Seiten 1, so hat man

$$1 + \frac{\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c}}{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c}} = 1 + \frac{\text{Sin.B} \cdot \text{Cos.A}}{\text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B}},$$ oder

$$\frac{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c} + \text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c}}{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c}} = \frac{\text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B} + \text{Sin.B} \cdot \text{Cos.A}}{\text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B}},$$ oder

$$\frac{(\text{Cos.a} + \text{Cos.b})(1 - \text{Cos.c})}{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c}} = \frac{\text{Sin.}(A+B)}{\text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B}}$$ (§. 75. F. 17).

Man subtrahire von obigen Gleichungen 1, so hat man

$$\frac{\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c}}{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.e}} - 1 = \frac{\text{Sin.B} \cdot \text{Cos.A}}{\text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B}} - 1$$

$$\frac{\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c} - \text{Cos.b} + \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c}}{\text{Cos.b} - \text{Cos.a} \cdot \text{Cos.c}} = \frac{\text{Sin.B} \cdot \text{Cos.A} - \text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B}}{\text{Sin.A} \cdot \text{Cos.B}},$$ oder

$$\frac{(\text{Cof. a} - \text{Cof. b})(1 + \text{Cof. c})}{\text{Cof. b} - \text{Cof. a} \cdot \text{Cof. c}} = \frac{\text{Sin. (B} - \text{A)}}{\text{Sin. A} \cdot \text{Cof. B}}$$ (§. 75. F. 18).

Man dividire letztere Gleichung durch erstere, so hat man

$$\frac{(\text{Cof. a} - \text{Cof. b}) \cdot (1 + \text{Cof. c})}{(\text{Cof. a} + \text{Cof. b}) \cdot (1 - \text{Cof. c})} = \frac{\text{Sin. (B} - \text{A)}}{\text{Sin. (B} + \text{A)}}.$$

Aber $\frac{1 + \text{Cof. c}}{1 - \text{Cof. c}} = \text{Cot.} \frac{1}{2} c^2$ (§. 75. F. 39), folglich, wenn man diesen Werth in die Gleichung bringt,

$$\frac{\text{Cof. b} - \text{Cof. b}}{\text{Cof. c} + \text{Cof. b}} \cdot \text{Cot.} \frac{1}{2} c^2 = \frac{\text{Sin. (B} - \text{A)}}{\text{Sin. (B} + \text{A}}.$$

Nach §. 75. F. 30 ist $\text{Cof. a} + \text{Cof. b} = -2 \text{Sin.} \frac{1}{2} (a+b) \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} (a-b)$, und nach §. 75. F. 29 ist $\text{Cof. a} - \text{Cof. b} = -2 \text{Cof.} \frac{1}{2} (a+b) \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} (a-b)$; folglich

$$\frac{\text{Cof. a} - \text{Cof. b}}{\text{Cof. a} + \text{Cof. b}} = \frac{-2 \text{ Sin.} \frac{1}{2} (a+b) \cdot \text{Sin.} \frac{1}{2} (a-b)}{2 \text{ Cof.} \frac{1}{2} (a+b) \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} (a-b)}$$

$$= \text{Tang.} \frac{1}{2} (a+b) \cdot - \text{Tang.} \frac{1}{2} (a-b)$$

$$= \text{Tang.} \frac{1}{2} (a+b) \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2} (b-a).$$

Ferner $\text{Sin. x} = 2 \text{Sin.} \frac{1}{2} x \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} x$ (§. 75. F. 35), also

$$\frac{\text{Sin. (B} - \text{A)}}{\text{Sin. (B} + \text{A)}} = \frac{2 \text{ Sin.} \frac{1}{2} (\text{B} - \text{A}) \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} (\text{B} - \text{A})}{2 \text{ Sin.} \frac{1}{2} (\text{B} + \text{A}) \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} (\text{B} + \text{A})},$$

folglich $\text{Tang.} \frac{1}{2} (a+b) \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2} (b-a) \cdot \text{Cot.} \frac{1}{2} c^2$

$$= \frac{\text{Sin. (B} - \text{A)}}{\text{Sin. (B} + \text{A)}} = \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2} (\text{B} - \text{A}) \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} (\text{B} - \text{A})}{\text{Sin.} \frac{1}{2} (\text{B} + \text{A}) \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} (\text{B} + \text{A})}.$$

Es ist aus I $\frac{\text{Sin. b}}{\text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. A}}$ und

$$1 + \frac{\text{Sin. b}}{\text{Sin. a}} = 1 + \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. A}}, \text{ oder}$$

Sin.

$$\frac{\text{Sin. a} + \text{Sin. b}}{\text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}{\text{Sin. A}} \text{ und}$$

$$\frac{\text{Sin. b}}{\text{Sin. a}} - 1 = \frac{\text{Sin. B}}{\text{Sin. A}} - 1, \text{ oder}$$

$$\frac{\text{Sin. b} - \text{Sin. a}}{\text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B} - \text{Sin. A}}{\text{Sin. A}}.$$

Man dividire letztere Gleichung durch erstere, so hat man

$$\frac{\text{Sin. b} - \text{Sin. a}}{\text{Sin. a} + \text{Sin. b}} = \frac{\text{Sin. B} - \text{Sin. A}}{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}.$$

Aber aus §. 75. F. 28 und 27 ist

$\text{Sin.b} - \text{Sin.a} = 2\text{Cof.}\frac{1}{2}(a+b) . \text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)$ und

$\text{Sin.a} + \text{Sin.b} = 2\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b) . \text{Cof.}\frac{1}{2}(a-b)$; also

$$\frac{\text{Sin. b} - \text{Sin. a}}{\text{Sin. a} + \text{Sin. b}} = \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(a+b) . \text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b) . \text{Cof.}\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$= \text{Cot.}\frac{1}{2}(a+b) . \text{Tang.}\frac{1}{2}(a-b)$$

$$= \frac{\text{Sin. B} - \text{Sin. A}}{\text{Sin. A} + \text{Sin. B}}$$

$$= \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-A) . \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+A)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+A) . \text{Cof.}\frac{1}{2}(B-A)} \text{ (§. 75. F. 27. 28).}$$

Man multiplicire das, was in dieser Gleichung linker Hand steht, mit dem, was die vorige Gleichung linker Hand hat, so hat man

$\text{Tang.}\frac{1}{2}(b-a) . \text{Tang.}\frac{1}{2}(b+a) . \text{Tang.}\frac{1}{2}(b-a) .$
$\text{Cot.}\frac{1}{2}(b+a)$, aber

$\text{Cot. x} = \frac{1}{\text{Tang. x}}$ §. 75. F. 4, und

$\text{Cot. x} . \text{Tang. x} = 1$, folglich

Tang.

$\text{Tang.}\frac{1}{2}(b+a) \cdot \text{Cot.}\frac{1}{2}(b+a = 1$, mithin obiger Ausdruck $= \text{Tang.}\frac{1}{2}(b-a)^2$ und

$$(\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b-a))^2 \cdot \text{Cot.}\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(B-A) \cdot \text{Cof.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+A) \cdot \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+A)}.$$

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-A) \cdot \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+A)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+A) \cdot \text{Cof.}\frac{1}{2}(B-A)} = \frac{(\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-A))^2}{(\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+A))^2}$$ und

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b-a) \cdot \text{Cot.}\tfrac{1}{2}c = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+A)}.$$

Man dividire nun die erste Gleichung durch die zweyte, so bekommt man

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b+a) \cdot \text{Cot.}\tfrac{1}{2}c = \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(B+A)}.$$

Durch die Division dieser beyden Gleichungen durch $\text{Cot.}\frac{1}{2}c$, und wenn man $\text{Tang.}\frac{1}{2}c$ für $\frac{1}{\text{Cot.}\frac{1}{2}c}$ setzt, erhält man

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b-a) = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}c \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+A)}$$ und

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(b+a) = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}c \cdot \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(B+A)}.$$

Aus den Gleichungen III bekommt man

4) $\text{Cof.A} + \text{Cof.B} \cdot \text{Cof.C} = \text{Sin.B} \cdot \text{Sin.C} \cdot \text{Cof.a}$, und
$\text{Cof.B} + \text{Cof.A} \cdot \text{Cof.C} = \text{Sin.A} \cdot \text{Sin.C} \cdot \text{Cof.b}$.

Durch die Division der ersten Gleichung durch die zweyte bekommt man

$$\frac{\text{Cof. A} + \text{Cof. B} \cdot \text{Cof. C}}{\text{Cof. B} + \text{Cof. A} \cdot \text{Cof. C}} = \frac{\text{Sin. B} \cdot \text{Cof. a}}{\text{Sin. A} \cdot \text{Cof. b}} = \frac{\text{Sin. b} \cdot \text{Cof. a}}{\text{Sin. a} \cdot \text{Cof. b}}.$$

Man

Man addire und subtrahire die Einheit, so findet man

$$\frac{(\text{Cos. A}+\text{Cos. B}) \,.\, (1+\text{Cos. C})}{\text{Cos. B}+\text{Cos. A} \,.\, \text{Cos. C}} = \frac{\text{Sin. } (b+a)}{\text{Sin. a} \,.\, \text{Cos. b}} \text{ und}$$

$$\frac{(\text{Cos. A}-\text{Cos. B}) \,.\, (1-\text{Cos. C})}{\text{Cos. B}+\text{Cos. A} \,.\, \text{Cos. C}} = \frac{\text{Sin. } (b-a)}{\text{Sin. a} \,.\, \text{Cos. b}}.$$

Man dividire die zweyte Gleichung durch die erste, so hat man

$$\frac{\text{Cos. A}-\text{Cos. B}}{\text{Cos. A}+\text{Cos. B}} \,.\, \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\text{C}^2 = \frac{\text{Sin. } (b-a)}{\text{Sin. } (b+a)}, \text{ oder}$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{A}) \,.\, \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{A}) \,.\, \text{Tang.}\tfrac{1}{2}\text{C}^2 = \frac{\text{Sin. } (b-a)}{\text{Sin. } (b+a)} = \frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b-a) \,.\, \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+a) \,.\, \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+a)}.$$

Auf eine ähnliche Art, wie in 3, leitet man aus der dort gebrauchten Gleichung

$$\frac{\text{Sin. b} - \text{Sin. a}}{\text{Sin. b} + \text{Sin. a}} = \frac{\text{Sin. B} - \text{Sin. A}}{\text{Sin. B} + \text{Sin. A}}$$

die folgende her

$$\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b-a) \,.\, \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+a)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+a) \,.\, \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-a)} = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{A}) \,.\, \text{Cot.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{A}):$$

Multiplicirt und dividirt man die unmittelbar vorhergehende Gleichung durch diese, so bekommt man nach Ausziehung der Quadratwurzel folgende zwey:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{A}) = \text{Cot.}\tfrac{1}{2}\text{C} \,.\, \frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}+\text{A}) = \text{Cot.}\tfrac{1}{2}\text{C} \,.\, \frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(b+a)}.$$

Bringt man in die Gleichungen unter 1 und 2 für 1+Cos. A, 1−Cos. A, 1+Cos. a, 1−Cos. a

ihre

ihre Werthe $2\,\text{Cof.}\frac{1}{2}A^2$, $2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}A^2$, $2\,\text{Cof.}\frac{1}{2}a^2$, $2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}a^2$, so lassen sich daraus nachfolgende vier Gleichungen herleiten:

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{-\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c+a)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(b-c-a)}{\text{Sin.}\,b\ .\ \text{Sin.}\,c}}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{-\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b-c)}{\text{Sin.}\,b\ .\ \text{Rin.}\,c}}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C+A)\ .\ \text{Coi.}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin.}\,B\ .\ \text{Sin.}\,C}}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B-C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(A-B+C)}{\text{Sin.}\,B\ .\ \text{Sin.}\,C}}.$$

Analytische sphärisch-trigonometrische Formeln.

§. 214.

1) $\text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,B = \text{Sin.}\,b\ .\ \text{Sin.}\,A.$

2) $\text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,C = \text{Sin.}\,c\ .\ \text{Sin.}\,A.$

3) $\text{Sin.}\,b\ .\ \text{Sin.}\,C = \text{Sin.}\,c\ .\ \text{Sin.}\,B.$

4) $\text{Cof.}\,a = \text{Cof.}\,b\ .\ \text{Cof.}\,c + \text{Cof.}\,A\ .\ \text{Sin.}\,b\ .\ \text{Sin.}\,c.$

5) $\text{Cof.}\,b = \text{Cof.}\,a\ .\ \text{Cof.}\,c + \text{Cof.}\,B\ .\ \text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,c.$

6) $\text{Cof.}\,c = \text{Cof.}\,a\ .\ \text{Cof.}\,b + \text{Cof.}\,C\ .\ \text{Sin.}\,c\ .\ \text{Sin.}\,b.$

7) $\text{Cof.}\,A = -\text{Cof.}\,B\ .\ \text{Cof.}\,C + \text{Cof.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,B\ .\ \text{Sin.}\,C.$

8) $\text{Cof.}\,B = -\text{Cof.}\,A\ .\ \text{Cof.}\,C + \text{Cof.}\,b\ .\ \text{Sin.}\,A\ .\ \text{Sin.}\,C.$

9) $\text{Cof.}\,C = -\text{Cof.}\,A\ .\ \text{Cof.}\,B + \text{Cof.}\,c\ .\ \text{Sin.}\,A\ .\ \text{Sin.}\,B.$

10) $\text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,B\ .\ \text{Cot.}\,A = \text{Cof.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,c - \text{Cof.}\,B\ .\ \text{Sin.}\,a\ .\ \text{Cof}\,c.$

11) $\text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,C\ .\ \text{Cot.}\,A = \text{Cof.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,b - \text{Cof.}\,C\ .\ \text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,b.$

12)

12) $\text{Sin.}b \cdot \text{Sin.}A \cdot \text{Cot.}B = \text{Cof.}b \cdot \text{Sin.}c - \text{Cof.}A \cdot \text{Sin.}b \cdot \text{Cof.}c.$

13) $\text{Sin.}b \cdot \text{Sin.}C \cdot \text{Cot.}B = \text{Cof.}b \cdot \text{Sin.}a - \text{Cof.}C \cdot \text{Sin.}b \cdot \text{Cof.}a.$

14) $\text{Sin.}c \cdot \text{Sin.}A \cdot \text{Cot.}C = \text{Cof.}c \cdot \text{Sin.}b - \text{Cof.}A \cdot \text{Sin.}c \cdot \text{Cof.}b.$

15) $\text{Sin.}c \cdot \text{Sin.}B \cdot \text{Cot.}C = \text{Cof.}c \cdot \text{Sin.}a - \text{Cof.}B \cdot \text{Sin.}c \cdot \text{Cof.}a.$

16) $\text{Sin.}A \cdot \text{Sin.}b \cdot \text{Cot.}a = \text{Cof.}A \cdot \text{Sin.}C + \text{Cof.}b \cdot \text{Sin.}A \cdot \text{Cof.}C.$

17) $\text{Sin.}A \cdot \text{Sin.}c \cdot \text{Cot.}a = \text{Cof.}A \cdot \text{Sin.}B + \text{Cof.}c \cdot \text{Sin.}A \cdot \text{Cof.}B.$

18) $\text{Sin.}B \cdot \text{Sin.}a \cdot \text{Cot.}b = \text{Cof.}B \cdot \text{Sin.}C + \text{Cof.}a \cdot \text{Sin.}B \cdot \text{Cof.}C.$

19) $\text{Sin.}B \cdot \text{Sin.}c \cdot \text{Cot.}b = \text{Sin.}A \cdot \text{Cof.}B + \text{Cof.}c \cdot \text{Sin.}B \cdot \text{Cof.}A.$

20) $\text{Sin.}C \cdot \text{Sin.}a \cdot \text{Cot.}c = \text{Cof.}C \cdot \text{Sin.}B + \text{Cof.}c \cdot \text{Sin.}C \cdot \text{Cof.}B.$

21) $\text{Sin.}C \cdot \text{Sin.}b \cdot \text{Cot.}c = \text{Cof.}C \cdot \text{Sin.}A + \text{Cof.}b \cdot \text{Sin.}C \cdot \text{Cof.}A.$

22) $\text{Sin.}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin.}b \ \text{Sin.}c}}.$

23) $\text{Cof.}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin.}b \cdot \text{Sin.}c}}.$

24) $\text{Tang.}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)}}.$

25) $\text{Sin.}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a) \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin.}a \cdot \text{Sin.}c}}.$

26)

26) $\text{Cof.}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,c}}$.

27) $\text{Tang.}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)}}$.

28) $\text{Sin.}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)\ .\ \text{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,b}}$.

29) $\text{Cof.}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin.}\,a\ .\ \text{Sin.}\,b}}$.

30) $\text{Tang.}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c-b)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b+c)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b-c)}}$.

31) $\text{Sin.}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B+C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin.}\,B\ .\ \text{Sin.}\,C.}}$.

32) $\text{Cof.}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B-C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin.}\,B\ .\ \text{Sin.}\,C}}$.

33) $\text{Tang.}\frac{1}{2}a = \frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B+C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B-C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(A+C-B)}$.

34) $\text{Sin.}\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B+C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Sin.}\,A\ .\ \text{Sin.}\,C}}$.

35) $\text{Cof.}\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B-C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin.}\,A\ .\ \text{Sin.}\,C}}$.

36) $\text{Tang.}\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B+C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B-C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C-A)}}$.

37) $\text{Sin.}\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B+C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Sin.}\,A\ .\ \text{Sin.}\,B}}$.

38) $\text{Cof.}\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+C-B)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{Sin.}\,A\ .\ \text{Sin.}\,B.}}$.

39) $\text{Tang}\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B+C)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+C-B)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(B+C-A)}}$.

40) $\text{Tang.}\frac{b-a}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}c\ .\ \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(B+A)}$.

41) $\text{Tang.}\frac{b+a}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}c\ .\ \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(B+A)}$.

42) $\text{Tang.}\frac{c-b}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}a\ .\ \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(C-B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)}$.

43)

43) $\text{Tang.}\frac{c+b}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}a \cdot \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(C-B)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(C+B)}$.

44) $\text{Tang.}\frac{a-c}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}b \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+C)}$.

45) $\text{Tang.}\frac{a+c}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}b \cdot \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(A+C)}$.

46) $\text{Tang.}\frac{B-A}{2} = \text{Cot.}\frac{1}{2}C \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(b+a)}$.

47) $\text{Tang.}\frac{B+A}{2} = \text{Cot.}\frac{1}{2}C \cdot \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(b+a)}$.

48) $\text{Tang.}\frac{C-B}{2} = \text{Cot.}\frac{1}{2}A \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(c+b)}$.

49) $\text{Tang.}\frac{C+B}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}A \cdot \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)}$.

50) $\text{Tang.}\frac{A-C}{2} = \text{Cot.}\frac{1}{2}B \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c)}$.

51) $\text{Tang.}\frac{A+C}{2} = \text{Cot.}\frac{1}{2}B \cdot \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(a+c)}$.

Sezt man, wie oben schon erwähnt, in allen diesen Gleichungen einen Winkel, z. B. $B = 90°$, so bekommt man eben so viele Gleichungen für rechtwinklichte Dreyecke.

Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie.

§. 215.

Aufgabe. Aus den drey gegebenen Seiten (a, b, c) eines sphärischen Dreyecks einen seiner Winkel A zu finden.

Auflösung. Hierzu dient die Formel 4.

$$\text{Cos.a} = \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c} + \text{Cos.A} \cdot \text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c},$$ oder

$$\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c} = \text{Cos.A} \cdot \text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c},$$ folglich

$$\frac{\text{Cos.a} - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c}}{\text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c}} = \text{Cos.A}.$$

Auch die Formel 22

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a}+\text{b}-\text{c}) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\text{a}+\text{c}-\text{b}}{\text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c}}$$

giebt das Gesuchte. Letztere ist zum Rechnen bequemer.

§. 216.

Aufgabe. Aus den drey gegebenen Winkeln (A, B, C) eines sphärischen Dreyecks eine seiner Seiten (a) zu finden.

Auflösung.

Unter der Nummer 7 kommt folgende Formel vor:

$$\text{Cos.A} = -\text{Cos.B} \cdot \text{Cos.c} + \text{Cos.a} \cdot \text{Sin.B} \cdot \text{Sin.C},$$ also

$$\text{Cos.A} + \text{Cos.B} \cdot \text{Cos.C} = \text{Cos.a} \cdot \text{Sin.B} \cdot \text{Sin.C},$$ folglich

$$\frac{\text{Cos.A} + \text{Cos.B} : \text{Cos.C}}{\text{Sin.B} \cdot \text{Sin.C}} = \text{Cos.a}.$$

Diese Formel giebt das Gesuchte.

Auch die Formeln 21, 22, 23 lösen diese Aufgaben auf.

§. 217.

§. 217.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten (b, c) eines sphärischen Dreyecks und dem eingeschlossenen Winkel (A) die beyden andern Winkel (B, C) zu finden.

Auflösung. Die Formeln 48 u. 49 geben

$$\text{Tang.}\frac{C-B}{2} = \text{Cot.}\frac{1}{2}A \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(c+b)}, \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\frac{C+B}{2} = \text{Cot.}\frac{1}{2}A \cdot \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(c+b)}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man die halbe Summe und den halben Unterschied der beyden unbekannten Winkel, woraus man auf die bekannte Weise jeden Winkel besonders erhält.

§. 218.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite (b) und den anliegenden Winkeln (B, C) eines sphärischen Dreyecks die beyden andern Seiten (b, c) zu finden.

Auflösung. Hierzu dienen die Formeln 42 und 43.

$$\text{Tang.}\frac{c-b}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}a \cdot \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(C-B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(C+B)}, \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\frac{c+b}{2} = \text{Tang.}\frac{1}{2}a \cdot \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(C-B)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(C+B)}.$$

Man findet mittelst dieser Formeln beyder gesuchten Seiten Unterschied und Summe, und daraus jede Seite besonders.

§. 219.

§. 219.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten (a, b) eines sphärischen Dreyecks und dem der einen Seite gegenüber liegenden Winkel (A) den Winkel, welcher der andern gegebenen Seite gegenüber liegt (B), zu finden.

Auflösung. Die Formel

$$\text{Sin. B} = \frac{\text{Sin. b} \cdot \text{Sin. A}}{\text{Sin. a}}$$

giebt das Gesuchte.

In dem sphärischen Dreyeck sind nun noch zwey Stücke unbekannt, nämlich eine Seite (c) und ein Winkel (C).

Um die Seite c zu finden, bediene man sich der Formeln 40 und 41,

$$\text{Tang.} \frac{b-a}{2} = \text{Tang.} \frac{1}{2}c \cdot \frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(B-A)}{\text{Sin.} \frac{1}{2}(B+A)} \text{ und}$$

$$\text{Tang.} \frac{a+b}{2} = \text{Tang.} \frac{1}{2}c \cdot \frac{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B-A)}{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B+A)}.$$

Aus diesen Formeln werden durch die Division mit dem Factor rechter Hand folgende zwey:

$$\frac{\text{Sin.} \frac{1}{2}(B+A)}{\text{Sin.} \frac{1}{2}(B-A)} \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2}(b-a) = \text{Tang.} \frac{1}{2}c, \text{ und}$$

$$\frac{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B+A)}{\text{Cos.} \frac{1}{2}(B-A)} \cdot \text{Tang.} \frac{1}{2}(b+a) = \text{Tang.} \frac{1}{2}c.$$

§. 220.

Aufgabe. Aus den drey gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyecks das Perpendikel zu bestimmen, welches von einer seiner Spitzen auf die gegenüberliegende Seite gefällt worden.

Auflösung. Es sey ABC, Fig. 89, das sphärische Dreyeck; man nenne das Perpendikel $BD = p$.

In dem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck BDA ist aus Formel 1, wenn man p für a und $C = 90°$ setzt, um die dortige Formel auf das rechtwinklichte sphärische Dreyeck anzuwenden,

$$p = \text{Sin. } c \cdot \text{Sin. } A.$$

Wäre nun der Winkel A bekannt oder gegeben, so wäre, weil auch c gegeben ist, die Aufgabe aufgelöst; allein A ist unbekannt und muß, weil die drey Seiten gegeben sind, aus diesen bestimmt werden.

Dazu dienen die Formeln 22 und 23,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c}}, \text{ und}$$

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c}}.$$

Man multiplicire diese Gleichungen mit einander, so bekommt man

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A \cdot \text{Cos. } \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(\text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(a+c-b) \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2}(b+c-a))}{\text{Sin. } b \cdot \text{Sin. } c}}$$

Aber

Aber $\text{Sin.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Cof.}\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\text{Sin.}A$ (§. 75. F. 35), also

$$\text{Sin.}A = \frac{2}{\text{Sin.}b \cdot \text{Sin.}c} \cdot \sqrt{(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a))}.$$

Bringt man diesen Werth von Sin. A, in obige Gleichung für p, so hat man

$$p = \frac{2}{\text{Sin.}c} \cdot \sqrt{(\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+b-c) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(a+c-b) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}(b+c-a))}.$$

§. 221.

Aufgabe. Aus den drey gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyecks die Abschnitte einer Seite zu bestimmen, in welche dieselbe durch das Perpendikel von dem gegenüberliegenden Winkel getheilt wird.

Auflösung. Das Dreyeck sey ABC Fig. 89; das Perpendikel heiße p, $Ad = x$ und $Cd = y = b - x$.

Nach der Formel 6 ist $\text{Cof}\,c = \text{Cof.}a \cdot \text{Cof.}b + \text{Cof.}C \cdot \text{Sin.}a \cdot \text{Sin.}b$

Will man diese Formel auf die beyden rechtwinklichten sphärischen Dreyecke BDA und BDC anwenden, so muß man $C = 90°$ setzen, wodurch $\text{Cof.}\,90° = 0$ wird; ferner ist hier $a = p$ und $b = x$ und $= y$. Dadurch verwandelt sich die Gleichung in

Cof.

Cos. c = Cos. p . Cos. x, und im zweyten Dreyeck
Cos. a = Cos. p . Cos. y.

Aber Cos. y = Cos. (b − x) = Cos. b . Cos. x
+ Sin. b . Cos. x, folglich

Cos. a = Cos. p (Cos. b . Cos. x + Sin. b . Sin. x).

Man dividire, um p wegzuschaffen, die zweyte Gleichung durch die erste, so bekommt man

$$\frac{\text{Cos. p (Cos. b . Cos. x + Sin. b . Sin. x}}{\text{Cos. p . Cos. x}} = \frac{\text{Cos. a}}{\text{Cos. c}}, \text{ oder}$$

$$\text{Cos. b} + \frac{\text{Sin. b Sin. x}}{\text{Cos. x}} = \frac{\text{Cos. a}}{\text{Cos. c}}, \text{ oder}$$

$$\text{Cos. b} + \text{Sin. b . Tang. x} = \frac{\text{Cos. a}}{\text{Cos. c}}, \text{ oder}$$

$$\text{Sin. b . Tang. x} = \frac{\text{Cos. a}}{\text{Cos. c}} - \text{Cos. b und}$$

$$\text{Tang. x} = \frac{\text{Cos. a}}{\text{Cos. c . Sin. b}} - \text{Cot. b.}$$

Eben so findet man y, wenn man a mit c und x mit y vertauscht, oder

$$\text{Tang. y} = \frac{\text{Cos. c}}{\text{Cos. a . Sin. b}} - \text{Cot. b.}$$

Die gesuchten Abschnitte x and y sind also aus den gegebenen Seiten bestimmt.

§. 222.

Aufgabe. Aus der gegebenen Grundlinie eines sphärischen Dreyecks, dem Unterschiede der beyden Winkel an derselben und dem Unterschiede der beyden andern Seiten, das Dreyeck zu finden.

Auflösung. In dem Dreyeck ABC, Fig. 89, sind folgende Stücke gegeben:

1) $AC = b$;

2) $A - C = f$;

3) $AC - AB$ oder $a - c = g$.

Da also die Unterschiede der Winkel A und C, so wie die Seiten BC und AB, gegeben sind: so kommt es nun darauf an, deren Summe oder $A + C$ und $AC + AB$ oder $a + c$ zu finden.

Die Formel 44 giebt

$$\text{Tang.}\ \frac{a-c}{2} = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(A-C)}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(A+C)}.$$

In diese Formel setze man g statt $a - c$ und f statt $A - C$, so bekommt man

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}g = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}f}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(A+C)} \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}g \cdot \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(A+C) = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}b \cdot \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}f,$$

folglich $$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\text{Tang.}\ \frac{1}{2}b \cdot \text{Sin.}\ \frac{1}{2}f}{\text{Tang.}\ \frac{1}{2}g}.$$

Aus dieser Formel findet man $A + C$. Wir wollen es h nennen.

In den Formeln 50 und 51 sind folgende Gleichungen vorgekommen:

$$\text{Tang.}\ \frac{A-C}{2} = \text{Cot.}\ \tfrac{1}{2}B \cdot \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(a-c)}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\text{Tang.}\ \frac{A+C}{2} = \text{Cot.}\ \tfrac{1}{2}B \cdot \frac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(a-c)}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(a+c)}.$$

Man

Man dividire die erste durch die zweyte, so bekommt man

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A+C)} = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-c)\ .\ \text{Cof.}\frac{1}{2}(a+c)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(a-c)\ .\ \text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c)}.$$

Aber $\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(a-c)} = \text{Tang.}\frac{1}{2}(a-c)$ und

$\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(a+c)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+c)} = \text{Cot.}\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c)}$ (§75.F.4).

Folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichung bringt, ist

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A-C)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(A+C)} = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a-c)}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c)}.$$

Aber $A-C=f$, $a-c=g$, $A+C=h$, folglich

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}f}{\text{Tang.}\frac{1}{2}h} = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}g}{\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c)} \text{ und}$$

$$\text{Tang.}\frac{1}{2}(a+c) = \frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}g\ .\ \text{Tang.}\frac{1}{2}h}{\text{Tang.}\frac{1}{2}f}.$$

Aus dieser Formel findet man die Summe der unbekannten Seiten, deren Unterschied gegeben war.

Man setze $a+c=l$, so ist $A=\frac{h+f}{2}$, $C=\frac{h-f}{2}$, $a=\frac{l+g}{2}$ und $c=\frac{l-g}{2}$.

§. 223.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Scheitelwinkel eines sphärischen Dreyecks und den Abschnitten, in welche das von der Spitze dieses Winkels auf die Grundlinie gezogene Perpendikel dieselbe theilt, das Dreyeck zu finden.

Auflösung. Im Dreyeck ABC, Fig. 89, ist gegeben

1) der Winkel $ABC = B$;

2) die Abschnitte $AD = m$ und $CD = n$.

Da $B = ABD + DBC$, so ist die Summe dieser Winkel bekannt; man suche ihren Unterschied oder $ABD - DBC = x$, so ist

$$ABD = \frac{B + x}{2} \quad \text{und}$$

$$DBC = \frac{B - x}{2}.$$

In den beyden rechtwinklichten Dreyecken ADB und CDB ist aus §. 170. F. 9.

$\text{Sin. } BD = \text{Sin. } p = \text{Tang. } m \,.\, \text{Cot.} \frac{1}{2}(B+x)$

und $\text{Sin. } p = \text{Tang. } n \,.\, \text{Cot.} \frac{1}{2}(B-x)$, folglich

$\text{Tang. } m \,.\, \text{Cot.} \frac{1}{2}(B+x) = \text{Tang. } n \,.\, \text{Cot.} \frac{1}{2}(B-x)$,

oder $$\frac{\text{Tang. } m}{\text{Tang. } n} = \frac{\text{Cot.} \frac{1}{2}(B-x)}{\text{Cot.} \frac{1}{2}(B+x)}$$

$$= \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2}(B+x)}{\text{Tang.} \frac{1}{2}(B-x)} \quad (\text{§. 75. F. 4.})$$

$$= \frac{\text{Sin. } B + \text{Sin. } x}{\text{Sin. } B - \text{Sin. } x} \quad \text{und}$$

$\text{Tang. } m \,.\, \text{Sin. } B - \text{Tang. } m \,.\, \text{Sin. } x = \text{Tang. } n \,.$

$\text{Sin. } B + \text{Tang. } n \,.\, \text{Sin. } x$ und

$\text{Tang. } m \,.\, \text{Sin. } B - \text{Tang. } n \,.\, \text{Sin. } B = \text{Tang. } m \,.$

$\text{Sin. } x + \text{Tang. } n \,.\, \text{Sin. } x$, oder

$(\text{Tang. } m - \text{Tang. } n)\,\text{Sin. } B = (\text{Tang. } m + \text{Tang. } n)$

$\text{Sin. } x$ und

Tang.

$$\frac{(\text{Tang.m} - \text{Tang.n})\ \text{Sin.B}}{\text{Tang.m} + \text{Tang.n}} = \text{Sin. x.}$$

Aber $\text{Tang.m} + \text{Tang.n} = \frac{\text{Sin.}(m+n)}{\text{Cos.x} \cdot \text{Cos.y}}$ (§ 75. F. 31)

und

$$\text{Tang.m} - \text{Tang.n} = \frac{\text{Sin.}(m-n)}{\text{Cos.x} \cdot \text{Cos.y}}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\text{Tang.m} - \text{Tang.n}}{\text{Tang m} + \text{Tang.n}} = \frac{\text{Sin.}(m-n)}{\text{Cos.x} \cdot \text{Cos.y}} \cdot \frac{\text{Cos.x} \cdot \text{Cos.y}}{\text{Sin.}(m+n)}$$

$$= \frac{\text{Sin.}(m-n)}{\text{Sin.}(m+n)}.$$

Mithin $\text{Sin.x} = \frac{\text{Sin.}(m-n)}{\text{Sin.}(m+n)} \text{Sin.B}$, oder

$\text{Sin.}(m+n) : \text{Sin.}(m-n) = \text{Sin.B} : \text{Sin.x.}$

Diese Proportion giebt folgenden hübschen Lehrsatz:

Wenn in einem sphärischen Dreyeck von einem Winkel desselben auf die gegenüber liegende Seite ein Perpendikel gezogen wird: so verhält sich der Sinus dieser Seite zum Sinus des Unterschiedes ihrer Segmente, wie der Sinus des Winkels zum Sinus des Unterschiedes der Winkel, in welche er durch das Perpendikel getheilt worden.

§. 224.

Wenn man in einem sphärischen Dreyeck ABC, Fig. 90, die Sehnen AB, AC, BC ziehet, so entsteht daraus ein geradlinichtes Dreyeck ABC,

wel-

welches das Sehnen-Dreyeck des sphärischen Dreyecks ABC genannt wird. Folgende Aufgaben werden lehren, wie man aus einigen Stücken des einen correspondirende Stücke des andern finden könne.

Aufgabe. Die Seiten eines sphärischen Dreyecks, ABC Fig. 90, sind gegeben; man soll die Seiten des Sehnendreyecks und umgekehrt aus diesen jene finden.

Auflösung 1. In der ebenen Trigonometrie ist gelehrt worden, daß die Sehne eines Bogens doppelt so groß ist, als der Sinus von dessen Hälfte, oder, wenn a′, b′, c′ die Sehnen der Bogen a, b, c bedeuten, so ist

$$a' = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a$$
$$b' = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b$$
$$c' = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c.$$

Sind also die Seiten des sphärischen Dreyecks oder a, b, c gegeben, so findet man aus diesen Gleichungen a′, b′, c′, oder die Seiten des Sehnendreyecks.

Auflösung 2. Aus obigen Gleichungen folgt

$$\tfrac{1}{2}a' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}a$$
$$\tfrac{1}{2}b' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b$$
$$\tfrac{1}{2}c' = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}c$$

und

und weil $\text{Cof.}x = 1 - 2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}x^2$ (§ 75. F. 36), so ist

$$\text{Cof. a} = 1 - \tfrac{1}{2}a'^2$$
$$\text{Cof. b} = 1 - \tfrac{1}{2}b'^2$$
$$\text{Cof. c} = 1 - \tfrac{1}{2}c'^2.$$

Sind also die Sehnen bekannt, so finde ich nach diesen Gleichungen die Bogen oder die Seiten des sphärischen Dreyecks.

§. 225.

Aufgabe. Die Seiten des sphärischen Dreyecks sind gegeben; man soll die Winkel des Sehnendreyecks und, wenn die Seiten des Sehnendreyecks bekannt sind, die Winkel des sphärischen Dreyecks finden.

Auflösung. Im geradlinichten Dreyeck, oder im Sehnendreyeck, ist nach §. 103. F. 7

$$\text{Cof. }\alpha = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2\,b'\,c'}.$$

In diese Gleichung bringe man für b', c', a' die Werthe aus dem vorigen §, so hat man

$$\text{Cof. }\alpha = \frac{4\,\text{Sin.}\frac{1}{2}b^2 + 4\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c^2 - 4\,\text{Sin.}\frac{1}{2}a^2}{8\,\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}b^2 + \text{Sin.}\frac{1}{2}c^2 - \text{Sin.}\frac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}b\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c}.$$

Eben so findet man

$$\text{Cof. }\beta = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}a^2 + \text{Sin.}\frac{1}{2}c^2 - \text{Sin.}\frac{1}{2}b^2}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}a\,.\,\text{Sin.}\frac{1}{2}c}$$

Cof.

$$\text{Cof. } \gamma = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2} a^2 + \text{Sin. } \frac{1}{2} b^2 - \text{Sin. } \frac{1}{2} e^2}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} a \ . \ \text{Sin. } \frac{1}{2} b}.$$

Der erste Theil der Aufgabe ist aufgelöst

Auflösung 2. Aus F. 4 ist

$$\text{Cof. } A = \frac{\text{Cof. } a - \text{Cof. } b \ . \ \text{Cof. } c}{\text{Sin. } b \ . \ \text{Sin. } c}.$$

Nun ist

$$\text{Cof. } a = 1 - \tfrac{1}{2} a'^2$$
$$\text{Cof. } b = 1 - \tfrac{1}{2} b'^2$$
$$\text{Cof. } c = 1 - \tfrac{1}{2} c'^2 ;$$

folglich weil

$$\text{Sin. } x = \sqrt{(1 - \text{Cof. } x^2)}$$
$$\text{Sin. } b = \sqrt{(1 - (1 - \tfrac{1}{2} b'^2)^2)}$$
$$= \sqrt{(1 - (1 - b'^2 + \tfrac{1}{4} b'^4))}$$
$$= \sqrt{(1 - 1 + b'^2 - \tfrac{1}{4} b'^4)}$$
$$= \sqrt{(b'^2 - \tfrac{1}{4} b'^4)}$$
$$= b' \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4} b'^2)}.$$

Eben so

$$\text{Sin. } c = \sqrt{(1 - (1 - \tfrac{1}{2} c'^2)^2)}$$
$$= \sqrt{(1 - (1 - c'^2 + \tfrac{1}{4} c^4))}$$
$$= \sqrt{(1 - 1 + c'^2 - \tfrac{1}{4} c'^4)}$$
$$= \sqrt{(c'^2 - \tfrac{1}{4} c'^4)}$$
$$= c' \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4} c'^2)}.$$

Diese Werthe bringe man in obige Gleichung

$$\text{Cof. } A = \frac{\text{Cof. } a - \text{Cof. } b \ . \ \text{Cof. } c}{\text{Sin. } b \ . \ \text{Sin. } c}$$

so bekommt man

$$\text{Cof. } A = \frac{1 - \frac{1}{2} a'^2 - 1 + \frac{1}{2} b'^2 + \frac{1}{2} c'^2 - \frac{1}{4} b'^2 \, c'^2}{b' c' \sqrt{\left(\frac{4 - b'^2}{4}\right)} \sqrt{\left(\frac{4 - c'^2}{4}\right)}}$$

=

$$= \frac{-\frac{2}{4}a'^2 + \frac{2}{4}b'^2 + \frac{2}{4}c'^2 - \frac{1}{4}b'^2c'^2}{\frac{1}{4}b'c'\sqrt{(4-b'^2)}\cdot\sqrt{(4-c'^2)}}$$

$$= \frac{-2a'^2 + 2b'^2 + 2c'^2 - b'^2c'^2}{b'c'\sqrt{(4-b'^2)}\cdot\sqrt{(4-c'^2)}}.$$

Die andern Winkel sind, nämlich

$$\text{Cos. B} = \frac{2a'^2 + 2c'^2 - 2b'^2 - a'^2c'^2}{a'c'\sqrt{(4-a'^2)}\cdot\sqrt{(4-c'^2)}}$$

$$\text{Cos. C} = \frac{2a'^2 + 2b'^2 - 2c'^2 - a'^2b'^2}{a'b'\sqrt{(4-a'^2)}\cdot\sqrt{(4-b'^2)}}.$$

Ist das sphärische Dreyeck gleichschenklicht oder $b = c$, so ist

$$\text{Cos. } \alpha = \frac{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}b^2 - \text{Sin. } \frac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}b^2}$$

$$= 1 - \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}b^2} \quad \text{und}$$

$$1 - \text{Cos. } \alpha = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}b^2}; \quad \text{aber}$$

$1 - \text{Cos. } \alpha = 2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}a^2$ (§ 75. F. 36), folglich

$$2\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}a^2}{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}b^2} \quad \text{und}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}a^2}{4\,\text{Sin. } \frac{1}{2}b^2} \quad \text{und}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}a}{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}b}.$$

Ist das sphärische Dreyeck gleichseitig oder auch $a = b$, also

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}a}{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}a}$$

$$= \tfrac{1}{2}.$$

Weil aber $\text{Sin. } \frac{60}{2} = \frac{1}{2}$ ist, so ist $\frac{1}{2}\alpha = \frac{60}{2}$ und $\alpha = 60$, wie auch seyn muß, weil in

die:

diesem Fall das geradlinichte Dreyeck gleichseitig ist.

Setzt man in der zweyten Auflösung $c' = b'$, so ist für das gleichschenklichte Dreyeck

$$\text{Cof. A} = \frac{4b'^2 - 2a'^2 - b'^4}{b'^2(4-b'^2)}$$

$$= \frac{4b'^2 - b'^4 - 2a'^2}{b'^2(4-b'^2)}$$

$$= 1 - \frac{2a'^2}{b'^2(4-b'^2)} \quad \text{und}$$

$$1 - \text{Cof. A} = \frac{2a'^2}{b'^2(4-b'^2)}; \quad \text{aber}$$

$$1 - \text{Cof. A} = 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2, \quad \text{folglich}$$

$$2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{2a'^2}{b'^2(4-b'^2)} \quad \text{und}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{a'^2}{b'^2(4-b'^2)} \quad \text{und}$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \frac{a'}{b'\sqrt{(4-b'^2)}}.$$

Setzt man auch $b' = a'$, so ist für das gleichseitige Dreyeck

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{\sqrt{(4-a'^2)}}.$$

§. 226.

Aufgabe. Ein Winkel eines sphärischen Dreyecks und die denselben einschließenden Seiten sind bekannt; der korrespondirende Winkel des Sehnendreyecks wird gesucht.

Auf-

Auflösung. Nach For. 4. findet man aus einem Winkel und den anliegenden oder einschließenden Seiten die dritte, oder

$$\text{Cos.a} = \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c} + \text{Cos. A} \cdot \text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c}$$

und

$$1 - \text{Cos.a} = 1 - \text{Cos.b} \cdot \text{Cos.c} - \text{Cos.A} \cdot \text{Sin.b} \cdot \text{Sin.c.}$$

Aber $1 - \text{Cos.a} = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,a^2$ (§. 75. F. 36) und

$$\text{Cos.b} = 1 - 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,b^2$$

$$\text{Cos.c} = 1 - 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,c^2$$

$\text{Sin.b} = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,b \cdot \text{Cos.}\,\frac{1}{2}\,b$ (§. 75. F. 35) und

$$\text{Sin.c} = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,c \cdot \text{Cos.}\,\frac{1}{2}\,c.$$

Diese Werthe bringe man in obige Gleichung, so hat man

$$2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,a^2 =$$

$$1 - (1 - 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2) \cdot (1 - 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2) - \text{Cos. A} \cdot$$

$$2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b \cdot \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,b \cdot 2\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c \cdot \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,c =$$

$$2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2 + 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2 - 4\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2 \cdot \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2$$

$$-4\text{Cos.A} \cdot \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b \cdot \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,b \cdot \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c \cdot \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,c,$$

also $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,a^2 =$

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2 + \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2 - 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b^2 \cdot \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c^2$$

$$-2\text{Cos.A} \cdot \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,b \cdot \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,b \cdot \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,c \cdot \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,c.$$

Im vorigen §. haben wir folgende Gleichung gefunden

$$\text{Cos.}\,\alpha = \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,b^2 + \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,c^2 - \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,a^2}{2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,b \cdot \text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,c}.$$

Den eben gefundenen Werth von $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,a^2$ bringe man in diese letzte Gleichung, so hat man

Cos.

$$\text{Cof.}\alpha = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}c + \text{Cof.}A \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}c.$$

Eben so findet man

$$\text{Cof.}\beta = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}c + \text{Cof.}B \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{Cof.}\gamma = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b + \text{Cof.}C \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}a \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b.$$

Wird $c = b$ gesetzt, so ist

$$\text{Cof.}\alpha = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2 + \text{Cof.}A \cdot \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b^2 \text{ und}$$

$$\text{Cof.}\alpha = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2 + \text{Cof.}A\ (1 - \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2)$$

(§. 75. F. 2), also

$$\text{Cof.}\alpha = \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2 + \text{Cof.}A - \text{Cof.}A \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2, \text{ oder}$$

$$\text{Cof.}\alpha = \text{Cof.}A + \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2 - \text{Cof.}A \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2, \text{ oder}$$

$$\text{Cof.}\alpha = \text{Cof.}A + (1 - \text{Cof.}A) \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2. \text{ Aber}$$

$$1 - \text{Cof.}A = 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2, \text{ mithin}$$

$$\text{Cof.}\alpha = \text{Cof.}A + 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b^2 \cdot \text{Sin.}\tfrac{1}{2}A^2.$$

§. 227.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel eines Sehnendreyecks den korrespondirenden sphärischen Winkel zu finden.

Auflösung. In dem geradlinichten Dreyeck ABC Fig. 90 ist, nach §. 103. F. 7,

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cdot \text{Cof.}\alpha.$$

Wir haben oben §. 225. folgende Gleichung gefunden

$$\text{Cof.}A = \frac{2b'^2 + 2c'^2 - 2a'^2 - b'^2c'^2}{b'c'\sqrt{(4-b'^2}\sqrt{(4-c'^2)}}$$

In diese bringe man den Werth von a'^2, so bekommt man

Cof.

$$\text{Cos. } A =$$

$$\frac{2b'^2+2c'^2-b'^2c'^2-2b'^2-2c'^2+4b'c' \cdot \text{Cos. } \alpha}{b'c'\sqrt{(4-b'^2)}\sqrt{(4-c'^2)}} =$$

$$\frac{4b'c' \cdot \text{Cos. } \alpha - b'^2c'^2}{b'c'\sqrt{(4-b'^2)}\sqrt{(4-c'^2)}} =$$

$$\frac{4\,\text{Cos. } \alpha - b'c'}{\sqrt{(4-b'^2)}\sqrt{(4-c'^2)}}.$$

Ist das Sehnendreyeck gleichschenklicht oder $b' = c'$, so hat man

$$\text{Cos. } A = \frac{4\,\text{Cos. } \alpha - b'^2}{4-b'^2} \quad \text{und}$$

$$1-\text{Cos. } A = 1 - \frac{4\,\text{Cos. } \alpha - b'^2}{4-b'^2}$$

$$= \frac{4-b'^2-4\,\text{Cos. } \alpha+b'^2}{4-b'^2}$$

$$= \frac{(1-\text{Cos. } \alpha)\,4}{4-b'^2}. \quad \text{Aber}$$

$$1-\text{Cos. } A = 2\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A^2 \quad \text{und}$$

$$1-\text{Cos. } \alpha = 2\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^2; \quad \text{also}$$

$$2\,\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{8\,\text{Sin. } \frac{1}{2}\alpha^2}{4-b^2}, \quad \text{oder}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{4\,\text{Sin. } \frac{1}{2}\alpha^2}{4-b^2} \quad \text{und}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A = \frac{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{(2+b')\cdot(2-b')}}.$$

Zusatz. $\text{Sin. } \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b'$ und $\text{Cos. } \frac{1}{2}b = \sqrt{(1-\text{Sin. } \frac{1}{2}b^2)}$

$$= \sqrt{(1-\tfrac{1}{4}b'^2)} = \sqrt{\left(\frac{4-b'^2}{4}\right)} \text{ und } 2\,\text{Cos. } \tfrac{1}{2}b$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{4-b'^2}{4}\right)} = \sqrt{(4-b'^2)}; \quad \text{folglich}$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}A = \frac{2\,\text{Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{(4-b'^2)}}$$

=

$$= \frac{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{2 \text{ Cof. } \frac{1}{2} b}$$

$$= \frac{\text{Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{\text{Cof. } \frac{1}{2} b}$$ und

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A \ . \ \text{Cof. } \tfrac{1}{2} b = \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Dieses ist eine Gleichung zwischen dem Scheitelwinkel A eines sphärischen gleichschenklichten Dreyecks, dem ihm korrespondiren Winkel α des Sehnendreyecks und dem Schenkel b des ersten.

§. 228.

Wenn sich auf der Oberfläche einer Kugel zwey größte Kreise AMBP und ANBQ Fig. 91. schneiden, so entstehen die beyden gleich großen Streifen AMBNA und AQBPA, deren jede sich zur ganzen Kugelfläche verhält, wie der Neigungswinkel der beyden Kreisebenen zu 360° oder 4 rechten Winkeln.

Die beyden Kreisebenen AMBP und ANBQ schneiden sich in der geraden Linie AB; auf die lege man durch C den größten Kreis ANPQ senkrecht, und ziehe MP und NQ, so ist MCN der Neigungswinkel der beyden Kreisebenen und MN dessen Maaß. Man nenne die Kugelfläche $= S$, die Fläche des Streifens AMBNA $= s$, das Verhältniß des Bogens MN : MNPQ $= m : n$, so soll bewiesen werden, daß $s : S = MN : MNPQ$.

Wenn

Wenn nun dieses Verhältniß ein rationales, d. h. ein in ganzen oder gebrochenen Zahlen genau bestimmbares Verhältniß ist, so nenne man es m : n und denke sich die Peripherie MNPQ in n gleiche Theile getheilt, deren also m auf MN gehen gehen werden. Durch die n Theilungspuncte denke man sich ferner n größte Kreisebenen gelegt, welche alle durch A und B gehen werden. Die ganze Kugeloberfläche wird dadurch in n gleiche Streifen getheilt, deren m der Streifen AMBNA befaßt. Es verhält sich also der Streifen AMBNA zur ganzen Kugeloberfläche wie m : n oder

$$s : S = m : n, \quad \text{aber}$$
$$MN : MNPQ = m : n, \quad \text{folglich}$$
$$s : S = MN : MNPQ, \quad \text{oder}$$
$$= MN : 360°.$$

Sollte aber das Verhältniß MN : MNPQ irrational, d. h. nicht durch ein Zahlenverhältniß, dergleichen m : n vorstellt, sich genau ausdrücken lassen: so kann man sich doch durch wiederholte Eintheilungen einem solchen Zahlenverhältniß, so viel als man will, nähern, welches Verfahren die Exhaustions-Methode genannt wird.

§. 229.

Man ziehe auf der Oberfläche einer Kugel, Fig. 92, nach Willkühr drey größte Kreise AMBP, ANBP, MNPQ, so ist die Summe derjenigen sphärischen Dreyecke, welche in derselben Halbkugel liegen, z. B. AMN und APQ, jedesmal demjenigen Streifen gleich, wovon der eine oder andere einen Theil ausmacht, oder

$$AMN + APQ = AMBNA, \text{ oder}$$
$$= ABPA.$$

Beweis. Es kommt darauf an, zu beweisen, daß das sphärische Dreyeck APQ dem sphärischen Dreyeck MBN gleich sey. Dies erhellet so: $ABP = PBM = 180°$, also $APB - BP = PBM - BP$, folglich $AP = BM$, eben so ist $BN = AQ$, $MN = PQ$; die beyden sphärischen Dreyecke APQ und MNB haben demnach gleiche Seiten, aber auch gleiche Winkel, nämlich bey M, N und P, Q sind rechte Winkel, und bey A und B gleiche Winkel, folglich haben sie auch gleiche Winkel, sind mithin gleich groß. Nun ist

$$AMN + MNB = AMBNA, \text{ aber}$$
$$MNB = APQ, \text{ folglich}$$
$$AMN + APQ = AMBNA.$$

Eben

Eben so läßt sich erweisen, daß $AMN = BPQ$, folglich

$$MNB + BPQ = AMBNA$$
$$= ABPA.$$

§. 230.

Die Summe zweyer sphärischen Dreyecke, MAN und APQ Fig. 93, welche auf die im vorigen Paragraphen erklärte Art entstehen, verhalten sich zur ganzen Kugeloberfläche wie der sphärische Winkel MAN, den beyde sphärische Dreyecke gemeinschaftlich haben, zu 360°.

Beweis.

$AMBNA$, oder $s : S = MAN : 360°$, aber

$$MAN + APQ = AMBNA, \text{ also}$$
$$MAN + APQ : S = MAN : 360°.$$

Ist z. B. $MAN = 30°$, so ist $MAN + APQ$

$$= \frac{30°}{360°} \cdot S = \frac{S}{12}.$$

§. 231.

Aufgabe. Aus den drey gegebenen Winkeln eines sphärischen Dreyecks den Flächeninhalt desselben zu finden.

Auflösung. Es sey ABC, Fig. 93, das sphärische Dreyeck, dessen Winkel A, B, C bekannt sind. Man verlängere die Seiten desselben, bis sie den größten Kreis um dasselbe schneiden.

Nach dem vorigen §. ist

$$HAG + DAE = \frac{A}{360^\circ} \cdot S$$

$$DBI + FBG = \frac{B}{360^\circ} \cdot S$$

$$FCE + HCI = \frac{C}{360^\circ} \cdot S.$$

Also $HAG + DAE + DBI + FBG + FCE + HCI = \frac{A}{360^\circ} \cdot S + \frac{B}{360^\circ} \cdot S + \frac{C}{360^\circ} \cdot S$

$$= \frac{A+B+C}{360^\circ} \cdot S.$$

Die Summe der 6 Dreyecke dieser Gleichung ist um 2 ABC größer, als die halbe Kugeloberfläche oder $\frac{1}{2}$ S. Was also linker Hand steht, ist demnach $= \frac{1}{2} S + 2ABC$, folglich

$$\frac{1}{2} S + 2ABC = \frac{A+B+C}{360^\circ} \cdot S, \text{ mithin}$$

$$2ABC = \frac{A+B+C}{360^\circ} \cdot S - \frac{1}{2} S$$

$$= \frac{A+B+C-180^\circ}{360^\circ} \cdot S; \text{ folglich}$$

$$ABC = \left(\frac{A+B+C-180^\circ}{720^\circ}\right) \cdot S.$$

Diese Gleichung läßt sich in nachfolgende Proportion auflösen:

$$ABC : S = A+B+C - 108^\circ : 720^\circ.$$

Das giebt folgenden hübschen Lehrsatz:

Jedes sphärische Dreyeck verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche, wie der Ueberschuß seiner

drey

drey Winkel über 180° zu 720° oder 8 rechten Winkeln.

Will man also den Flächeninhalt eines Kugeldreyecks, dessen Winkel bekannt, finden, so verfahre man nach folgenden Regeln:

1) Man addire die drey gegebenen Winkel,

$$A+B+C;$$

2) subtrahire davon 180°, oder

$$A+B+C-180°;$$

3) setze die Proportion auf: $720° : A+B+C = S : ABC$,

deren viertes Glied der verlangte Flächeninhalt des Kugeldreyecks ist, wobey die ganze Kugeloberfläche bekannt seyn muß.

§. 232.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten b, c eines sphärischen Dreyecks ABC Fig. 93. nebst dem eingeschlossenen Winkel A, den Flächeninhalt des Dreyecks zu bestimmen.

Auflösung. Man könnte 1) die beyden andern Winkel des sphärischen Dreyecks ABC, nämlich B und C nach den Formeln §. 214 For. 48. 49 finden, und dann wie §. 231 verfahren.

Aber man kann auch 2) eine besondere Formel aufsuchen, wodurch man $A+B+C-180 = m$ unmittelbar findet.

Wenn $A+B+C-180=m$, so ist $A+B+C=180+m$ und $\frac{1}{2}(A+B+C)=90+\frac{1}{2}m$, folglich Tang. $\frac{1}{2}(A+B+C)=$ Tang. $(90+\frac{1}{2}m)$ $=-$ Cot. $\frac{1}{2}m$.

Aus §. 75. F. 21 ist

$$\text{Tang.}(x+y)=\frac{\text{Tang. } x+\text{Tang. } y}{1-\text{Tang. } x \,.\, \text{Tang. } y}.$$

Man bringe in diese Gleichung $\frac{1}{2}A=x$ und $\frac{1}{2}(B+C)=y$, so hat man

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A+\text{Tang}\tfrac{1}{2}(B+C)}{1-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}A\,.\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(C+B)}.$$

Aber Tang. $(B+C)=$ Cot. $\frac{1}{2}A \cdot \frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)}$ (§. 214. F. 49), folglich

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$=\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}A+\text{Cot.}\frac{1}{2}A\cdot\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)}}{1-\text{Tang.}\frac{1}{2}A\,.\,\text{Cot.}\frac{1}{2}A\,.\,\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(a+b)}}=$$

$$\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}A\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)+\text{Cot.}\frac{1}{2}A\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)-}$$

$$:\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)-\text{Tang.}\frac{1}{2}A\,.\,\text{Cot.}\frac{1}{2}A\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)}$$

$$=\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}A\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)+\text{Cot.}\frac{1}{2}A\,.\,\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}{\text{Cof.}\frac{1}{2}(c+b)-\text{Cof.}\frac{1}{2}(c-b)}$$

(weil Tang. $\frac{1}{2}A$. Cot. $\frac{1}{2}A=1$, §. 75. F. 4).

Weil Tang. $\frac{1}{2}A=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}{\text{Cof.}\frac{1}{2}A}$ und Cot. $\frac{1}{2}A=\frac{\text{Cof.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin}\frac{1}{2}A}$ (§. 75. F. 3. 4) und

Cof.

$\text{Cos.}\frac{1}{2}(c \pm b) = \text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b \mp \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}b$

(§. 75. F. 19. 20),

so bringe man diese Werthe in obigen Zähler, so hat man

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A} \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b - \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A} \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}b +$$
$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A} \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b + \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A} \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}b,$$

oder

$$\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b - \text{Sin.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}b}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A} +$$
$$\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b + \text{Cos.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}b}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}$$

oder wenn man beyde Brüche auf gleiche Benennung bringt

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Sin.}\frac{1}{2}A^2 \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b - \text{Sin.}\frac{1}{2}A^2 \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}b \\ + \text{Cos.}\frac{1}{2}A^2 \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b + \text{Cos.}\frac{1}{2}A^2 \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}b\end{array}}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}A}$$

oder

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b(\text{Sin.}\frac{1}{2}A^2 + \text{Cos.}\frac{1}{2}A^2) + \text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b \\ (\text{Cos.}\frac{1}{2}A^2 - \text{Sin.}\frac{1}{2}A^2)\end{array}}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}A}$$

Aber $\text{Sin.}\frac{1}{2}A^2 + \text{Cos.}\frac{1}{2}A^2 = 1$ (§. 75. F. 1), $\text{Cos.}\frac{1}{2}A^2 - \text{Sin.}\frac{1}{2}A^2 = \text{Cos.}A$ (§. 75. F. 43, wenn man $\frac{1}{2}A = x = y$ setzt) und $\text{Cos.}\frac{1}{2}A \cdot \text{Sin.}\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\text{Sin.}A$ (§. 75. F. 35).

Bringt man diese Werthe in die Gleichung, so hat man

$$\frac{2\text{Cos.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b + 2\text{Sin.}\frac{1}{2}c \cdot \text{Cos.}\frac{1}{2}b \cdot \text{Cos.}A}{\text{Sin.}A}.$$

Aus

Aus dem Nenner wird, wenn man ihn auflöst,

$$\text{Cof.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b - \text{Sin.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b -$$
$$\text{Cof.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b - \text{Sin.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b =$$
$$-2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b.$$

Folglich $\text{Tang.}\,(A+B+C) =$

$$\frac{2\,\text{Cof.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b + 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Cof.}\tfrac{1}{2}b \;.\; \text{Cof.}\,A}{2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Sin.}\tfrac{1}{2}b \;.\; \text{Sin.}\,A}.$$

Aber $\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\,\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\,m$

$$\frac{\text{Cof.}\tfrac{1}{2}b}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}b} = \text{Cot.}\tfrac{1}{2}b$$

$$\frac{\text{Cof.}\tfrac{1}{2}c}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}c} = \text{Cot.}\tfrac{1}{2}c, \quad \text{so ist}$$

$$-\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\,m = -\,\frac{\text{Cot.}\tfrac{1}{2}c \;.\; \text{Cot.}\tfrac{1}{2}b}{\text{Sin.}\,A} - \text{Cot.}\,A, \text{ oder}$$

$$\text{Cot.}\tfrac{1}{2}\,m = \frac{\text{Cot.}\tfrac{1}{2}e \;.\; \text{Cot.}\tfrac{1}{2}b}{\text{Sin.}\,A} + \text{Cot.}\,A.$$

Aus dieser Formel findet man $m = A+B+C - 180°$, und also auch den Flächeninhalt des sphärischen Dreyecks $= \frac{m\,S}{720°}$.

§. 233.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyecks und aus dem Verhältniß seiner Fläche zur ganzen Kugelfläche das Dreyeck zu bestimmen.

Auflösung. Die gegebenen Seiten mögen b und c, das Verhältniß der Fläche des Kugeldreyecks zur Kugelfläche $1 : m'$ heißen, so ist, da $A+B+C-180 = m$,

$$1 : m' = m : 320^\circ \quad \text{und}$$

$$m = \frac{720^\circ}{m'} \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2} m = \frac{360.}{m'}.$$

Aus der Gleichung §. 232.

$$\text{Cot.} \tfrac{1}{2} m = \frac{\text{Cot. c} \cdot \text{Cot. b}}{\text{Sin. A}} + \text{Cot. A}$$

wird, wenn man für $\text{Cot.} \frac{1}{2} m$ $\frac{\text{Cof.} \frac{1}{2} m}{\text{Sin.} \frac{1}{2} m}$ und für Cot. A $\frac{\text{Cof. A}}{\text{Sin. A}}$ setzet,

$$\frac{\text{Cof.} \frac{1}{2} m}{\text{Sin.} \frac{1}{2} m} = \frac{\text{Cot. c} \cdot \text{Cot. b}}{\text{Sin. A}} + \frac{\text{Cof. A}}{\text{Sin. A}}$$

$$= \frac{\text{Cot. c} \cdot \text{Cot. b} + \text{Cof. A}}{\text{Sin. A}}$$

$$\text{Cof.} \tfrac{1}{2} m \cdot \text{Sin. A} = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} m \cdot \text{Cot. c} \cdot \text{Cot. b} + \text{Sin.} \tfrac{1}{2} m \cdot \text{Cof. A} \quad \text{und}$$

$$\text{Cof.} \tfrac{1}{2} m \cdot \text{Sin. A} - \text{Sin.} \tfrac{1}{2} m \cdot \text{Cof. A} = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} m \cdot \text{Cot. c} \cdot \text{Cot. b};$$

aber die Größe linker Hand ist $= \text{Sin.} (A - \frac{1}{2} m)$; also

$$\text{Sin.} (A - \tfrac{1}{2} m) = \text{Sin.} \tfrac{1}{2} m \cdot \text{Cot. c} \cdot \text{Cot. b}.$$

Aus dieser Gleichung findet man $A - \frac{1}{2} m$ und, weil $\frac{1}{2} m$ bekannt ist, auch A.

Da nun A bekannt ist, so kann man leicht die übrigen Winkel finden; nämlich $\frac{B+C}{2} = \frac{1}{2} m + 90 - \frac{1}{2} A$ und aus §. 214. F. 48 findet man $\frac{B-C}{2}$, woraus sich B und C herleiten lassen.

Siebentes Kapitel.

Von den Kegelschnitten.

§. 234.

Wenn ein Punct sich bewegt, so beschreibt er eine Linie, deren Natur von der Art abhängt, wie der Punct sich bewegt. Bewegt sich der Punct auf eine unregelmäßige, unbestimmte Weise, so entsteht eine Linie von der nämlichen Beschaffenheit, und eine solche Linie kann hier kein Gegenstand der Betrachtung seyn. Bewegt sich aber der Punct nach einem gewissen Gesetze, so entstehen, nach der Verschiedenheit dieses Gesetzes, verschiedene Linien.

§. 235.

Man denke sich, daß der Punct A (Fig. 94) durch irgend eine Bewegung in C gekommen, so wird der Ort des Puncts C gegen A durch die Linien CE und EA, die auf einander senkrecht sind, bestimmt. Bewegt sich der Punct A von C nach D, so bestimmen die Linien DF und FA seinen neuen Ort. Die Linie AB heißt die Abscissenlinie, und Stücke derselben, wie AE und AF, Abscissen, und die auf der Abscis-

scissenlinie senkrechten Linien CE und DF heißen Ordinaten, beyde gemeinschaftlich Coordinaten und zwar rechtwinklichte, wenn die Ordinaten auf den Abscissen senkrecht stehen. Wenn von Coordinaten schlechtweg die Rede ist, so werden immer rechtwinklichte darunter verstanden. Gewöhnlich bezeichnet man die Abcissen durch x, und die Ordinaten durch y. Eine veränderliche Größe, die durch eine andere veränderliche Größe bestimmt wird, heißt deren Function. Die Ordinaten sind also Functionen der Abscissen.

§. 236.

Weil AE : EC = AF : FD oder, wenn man AE = a, EC = c, AF = x und FD = y nennt, a : b = x : y und $y = \frac{bx}{a}$, so ist durch diese Gleichung der Ort des Puncts C bestimmt. Bewegt sich D nach G und ist abermals $y' = \frac{bx'}{a}$, so ist die von dem Puncte A, wenn immer dieses Gesetz $\frac{b}{a}$ der Bewegung beobachtet worden, beschriebene Linie eine gerade Linie. Bewegte sich der Punct nach dem Gesetze $y^2 = 2ax - x^2$, so würde er einen Kreis beschreiben; denn diese Gleichung läßt sich in die Proportion x : y = y : 2a−x auflösen, welche bekanntlich dem Kreise zukommt,

wo

wo die auf dem Durchmesser ($=2a$) senkrecht stehende und bis an die Peripherie verlängerte Linie die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten des Durchmessers x und $2a-x$ ist.

§. 237.

Ein Ausdruck, der den Gang des bewegten Puncts oder, was einerley ist, jeden Punct der beschriebenen Linie bestimmt, heißt eine Gleichung für eine solche Linie, aus der sich die Natur oder alle Eigenschaften derselben entwickeln lassen. So kann man aus der Gleichung $y^2=2ax-x^2$ alle Eigenschaften des Kreises herleiten:

1) Ist $y=0$, so muß auch $2ax-x^2$ oder $(2a-x)\,x=0$ seyn. Dies geschieht, wenn entweder $x=0$ oder $2a-x=0$ oder $2a=x$ ist. Die krumme Linie schneidet daher in zwey Puncten die Abscissenlinie 1) da, wo $x=0$ oder der Anfangspunct der Abscissen ist; 2) wo $x=2a$ oder der Axe der krummen Linie gleich ist.

2) Aus der Gleichung folgt $y=\pm\sqrt{(2ax-x^2)}$, d. h. es giebt für einerley x zwey gleiche y oder zwey gleiche Ordinaten. Die Curve oder krumme Linie hat demnach vom Anfangspuncte der Abscissen an zwey gleiche Schenkel zu beyden Seiten der Axe, die sich in dem Endpunct derselben vereinigen und

eine

eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie bilden, die von der Axe in zwey gleiche Theile getheilt wird.

3) Setzt man $x = a$, so ist $y^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$ und $y = a$, d. h. die Ordinate in der Mitte der Axe ist der halben Axe gleich.

Diese Eigenschaften kommen sämmtlich dem Kreise zu.

Die mit x und y bezeichneten Größen in der Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$ heißen die veränderlichen, die mit a bezeichnete die beständige Größe der Gleichung.

Eine veränderliche Größe, die durch andere veränderliche Größen und beständige Größen bestimmt wird, nennt man ebenfalls eine Function derselben.

§. 238.

Eine Gleichung oder Function heißt vom ersten, zweyten, dritten u. s. w. Grade, wenn die unbekannte Größe in derselben von der ersten, zweyten, dritten u. s. w. Potenz ist. Eine Linie, für die eine Gleichung vom ersten, zweyten, dritten u. s. w. Grade gehört, heißt von der ersten, zweyten, dritten u. s. w. Ordnung. Die gerade Linie ist also eine Linie der ersten, der Kreis eine Linie der zweyten Ordnung.

§. 239.

Zu den Linien der zweyten Ordnung gehören, außer dem Kreise:

1) die Parabel, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten die Gleichung $y^2 = bx$ gehört;

2) die Ellipse, deren Function $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ ist;

3) die Hyperbel, deren Function $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ ist.

Man ersieht aus den Gleichungen dieser drey krummen Linien, daß bey der Parabel das Quadrat der Ordinate y^2 dem Rechteck aus der Abscisse x und einer beständigen Linie b gleich ist; daher der Name Parabel von dem griechischen Worte παραβαλλειν, gleich seyn.

Bey der Ellipse ist das Quadrat der Ordinate um $\frac{bx^2}{a}$ kleiner als bx, weil $y^2 + \frac{bx^2}{a} = bx$, und daher hat diese krumme Linie den Namen Ellipse von ελλειπειν, fehlen.

Bey der Hyperbel übertrifft y^2 das Rechteck bx um die Größe $\frac{bx^2}{a}$, weil $y^2 - \frac{bx^2}{a} = bx$, und daher rührt der Name derselben, vom griechischen Worte ὑπερβαλλειν, übertreffen. Die beständige Linie b heißt der Parameter, (von παραμετρειν, messen), weil das Quadrat der Ordinate

durch

durch ein Rechteck aus ihm und der Abscisse gemessen wird.

Diese drey krummen Linien, nebst dem Kreise, heißen Kegelschnitte, weil man sie durch die Schneidung eines senkrechten Kegels erhält, obgleich man sie auch als krumme Linie in der Ebene sich gedenken kann, die wie der Kreis durch die Bewegung eines Puncts oder auf eine mechanische Weise durch Instrumente, wie der Kreis durch den Zirkel, beschrieben werden können. Man nennt sie auch Apollonische Kegelschnitte, weil Apollonius, ein griechischer Mathematiker, 200 Jahr vor Christi Geburt, ein Hauptwerk in acht Büchern über dieselben geschrieben hat, wovon aber nur 4 Bücher in der Ursprache auf unsere Zeiten gekommen, die drey folgenden in einer arabischen Uebersetzung vorhanden sind, das achte aber von Halley wieder hergestellt ist.

§. 240.

Wir wollen jetzt sehen, wie diese krummen Linien aus der Schneidung eines senkrechten Kegels entstehen. Ein senkrechter Kegel heißt ein solcher, dessen Axe, d. h. die gerade Linie von der Spitze desselben nach dem Mittelpuncte der Grundfläche auf dieser senkrecht steht.

§. 241.

§. 241.

Aufgabe. Die Oberfläche des senkrechten Kegels LAC (Fig. 95) wird durch die Ebene DKEH geschnitten, wodurch die krumme Linie DKEH entsteht; man soll eine Gleichung für diese krumme Linie finden.

Auflösung. Eine Ebene durch die Axe des Kegels LB gelegt, schneidet die Grundfläche desselben in der Linie AC und die schneidende Ebene in der Linie DE, welche die Axe des Kegelschnitts ist. Legt man ferner durch einen beliebigen Punct dieser Axe I eine Ebene parallel mit der Grundfläche des Kegels, so ist deren Durchschnitt mit der Oberfläche des Kegels der Kreis FHGK. Beyde Ebenen schneiden sich in der Linie HK, welche auf FG und DE senkrecht und eine gemeinschaftliche Ordinate beyder krummen Linien ist.

Man nenne $HI = y$, $IE = x$, $ALC = n$, $LED = m$, $LE = c$.

Soll man eine Gleichung für die krumme Linie DKEH finden, so muß man das Verhältniß zwischen deren rechtwinklichten Coordinaten y und x und den gegebenen und beständigen Größen, die in der Aufgabe vorkommen, bestimmen. Die Gleichung für den Kreis ist $HI^2 = y^2 = FI \cdot IG$, wofür man einen algebraischen Ausdruck suchen muß.

Im

Im Dreyeck EIG ist Sin. IEG oder Sin. m : IG = Sin. G : IE = x; im Dreyeck FID ist Sin. D : Sin. F oder Sin. (m+n) : Sin. G = FI : DI = FI : DE−IE = FI : DE−x, und im Dreyeck LED ist Sin. D : LE oder Sin. (m+n) : c = Sin. n : DE und $DE = \frac{c \cdot \text{Sin. } n}{\text{Sin. } (m+n)}$.

Im Dreyeck LPG ist G das Complement von $\frac{1}{2}n$, mithin Sin. G = Cos. $\frac{1}{2}n$ und Sin. E = Sin. m. Es ist aber Cos. $\frac{1}{2}n$: x = Sin. m : IG, also $IG = \frac{x \cdot \text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2}n}$.

Eine der obigen Proportionen ist Sin. G : Sin. (m+n) = DE−x : FI, also $FI = \frac{\text{Sin. } (m+n)}{\text{Sin. } G}$.

$$DE - x = \frac{\text{Sin. } (m+n)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}m} \cdot \left(\frac{c \text{ Sin. } n}{\text{Sin. } (m+n)} - x \right).$$

Folglich $y^2 = IF \cdot IG$

$$= \frac{\text{Sin. } (m+n)}{\text{Cos. } \frac{1}{2}n} \cdot \left(\frac{c \cdot \text{Sin. } n}{\text{Sin. } (m+n)} - x \right) \cdot \frac{x \cdot \text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2}n}$$

$$= \left(\frac{c \cdot \text{Sin. } n - \text{Sin. } (m+n)\, x}{\text{Cos. } \frac{1}{2}n} \right) \cdot \frac{\text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2}n} \cdot x$$

$$= \frac{\text{Sin. } m}{\text{Cos. } \frac{1}{2}n^2} \left(c \cdot \text{Sin. } n\, x - \text{Sin. } (m+n)\, x^2 \right).$$

Da dies eine Gleichung zwischen y und x oder HI und IE ist, so gilt dieselbe für den Schnitt DKEH.

§. 242.

§. 242.

Die schneidende Ebene kann sich um den Punct E bewegen, daß 1) $n+m < 180$; 2) $n+m = 180°$; 3) $n+m > 180°$ ist.

Im ersten Fall trifft sie alle Seitenlinien des Kegels unterhalb der Spitze desselben, oder durchschneidet die ganze krumme Oberfläche desselben; sie ist also eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, also eine Ellipse, und ihr gehört die gefundene Gleichung an.

Im zweyten Fall, wenn nämlich $n+m = 180°$, ist die schneidende Ebene der Seite des Kegels parallel, und die durch den Schnitt entstehende krumme Linie erstreckt sich, wie der untere Theil des Kegels, ins Unendliche und ist die Parabel. Wenn $n+m = 180°$, so ist $\text{Sin.}(n+m) = 0$, und aus obiger Gleichung der Ellipse wird folgende Gleichung der Parabel:

$$y^2 = \frac{\text{Sin. } m}{\text{Cof.} \frac{1}{2} n^2} \cdot cx \text{ Sin. } n \quad \text{und, weil Sin. } n$$

$$= \text{Sin. } m, = \frac{\text{Sin. } n^2 \; cx}{\text{Cof.} \frac{1}{2} n^2}.$$

Aber $\text{Sin.} n = 2 \text{Sin.} \frac{1}{2} n \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} n$ (§. 75. F. 35) und

$$\text{Sin.} n^2 = 4 \text{Sin.} \frac{1}{2} n^2 \cdot \text{Cof.} \frac{1}{2} n^2 \text{ und}$$

$$\frac{\text{Sin. } n^2}{\text{Cof.} \frac{1}{2} n^2} = 4 \text{Sin.} \frac{1}{2} n^2.$$

Die:

Diesen Werth bringe man in die Gleichung, so hat man

$$y^2 = 4 \operatorname{Sin.} \tfrac{1}{2} n^2 \, cx.$$

Im dritten Fall, wenn $n+m > 180°$, trifft die schneidende Ebene, die man sich unbegrenzt denken muß, den über L hinaus ohne Ende verlängerten entgegengesetzten Kegel; die krumme Linie hat also eine doppelte Krümmung, deren Schenkel sich ins Unendliche erstrecken. Diese krumme Linie ist die Hyperbel. Weil in diesem Fall $\operatorname{Sin.}(n+m)$ negativ ist, so sieht die Gleichung für dieselbe folgendergestalt aus

$$y^2 = \frac{\operatorname{Sin.} m}{\operatorname{Cos.} \frac{1}{2} n^2} (c \operatorname{Sin.} n x + \operatorname{Sin.}(n+m) x^2),$$

sie ist also nur in Rücksicht des Zeichens des zweyten Gliedes von der Gleichung der Ellipse unterschieden.

Aber oben §. 239 wurden folgende Gleichungen

1) $y^2 = bx$ für die Parabel,

2) $y^2 = bx - \frac{b}{a} x^2$ für die Ellipse, und

3) $y^2 = bx + \frac{b}{a} x^2$ für die Hyperbel,

angeführt. Daß aber obige Gleichungen mit diesen übereinstimmen, erhellet so:

1) Die gefundene Gleichung für die Ellipse ist

$$y^2 = \frac{c \operatorname{Sin.} m \,.\, \operatorname{Sin.} n}{\operatorname{Cos.} \frac{1}{2} n^2} x - \frac{\operatorname{Sin.} m \,.\, \operatorname{Sin.}(m+n)}{\operatorname{Cos.} \frac{1}{2} n^2} x^2.$$

Man nenne den Factor von $x = b$ und $\frac{c \text{ Sin. } n}{\text{Sin. } (m+n)}$ $= DE = a$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{c \text{ Sin. } m \cdot \text{Sin. } n}{\text{Cos. } \frac{1}{2} n^2} : \frac{c \text{ Sin. } n}{\text{Sin. } (m+n)}$

$= \frac{c \text{ Sin. } m \cdot \text{Sin. } n}{\text{Cos. } \frac{1}{2} n^2} \cdot \frac{\text{Sin. } (m+n)}{c \text{ Sin. } n} = \frac{\text{Sin. } m \cdot \text{Sin. } (m+n)}{\text{Cos. } \frac{1}{2} n^2}$.

Setzt man in der Formel $b = \frac{c \text{ Sin. } m \cdot \text{Sin. } n}{\text{Cos. } \frac{1}{2} n^2}$ Sin. m $= \text{Sin. } n$, so findet man $b = 4 \text{ Sin. } \frac{1}{2} n^2 c$.

Die hier gefundenen und die oben §. 239. angegebenen Gleichungen für Parabel, Ellipse und Hyperbel stimmen also völlig überein.

Hat der Winkel n eine bestimmte Größe, z. B. $= 30°$, so wird der Schnitt so lange eine Ellipse seyn, als $m < 150°$; wird $m = 150°$, so ist der Schnitt eine Parabel, und für $m > 150°$ wird der Schnitt eine Hyperbel. Es giebt also für einen angenommenen Kegel nur eine Parabel, aber unzählige Ellipsen und Hyperbeln.

Man kann sich aber auch den Winkel n veränderlich denken; für $n = 0°$ oder $= 180°$ findet kein Kegel, mithin auch keine krumme Linie Statt. Ist $c = 0$, so geht der Schnitt durch die Spitze des Kegels, und dann kommen wieder obige drey Fälle vor, nämlich $m+n <$ oder $= $ oder $> 180°$. Im ersten Fall ist der

Schnitt

Schnitt ein Punct, im zweyten eine gerade Linie, im dritten zwey gerade Linien.

Setzt man also $c = o$ und $m+n < 180°$, so ist $\text{Sin.}(m+n)$ positiv und man hat $y^2 = \frac{-\text{Sin. m}}{\text{Cos.}\frac{1}{2}n^2}\text{Sin.}(m+n)x^2$ oder

$$y^2 + \frac{\text{Sin. m}}{\text{Cos.}\frac{1}{2}n^2}\text{Sin.}(m+n)x^2 = o,$$

folglich müssen y und $x = o$ seyn, und diese Gleichung stellt einen Punct vor.

Ist $m+n = 180°$ und $\text{Sin.}(m+n) = \text{Sin.}\,180° = o$, so ist

$$y^2 = o \text{ oder } y = o,$$

weil das, was in der Parenthese steht, $= o$ ist. Dies ist die Gleichung für eine gerade Linie im Anfangspunct der Abscissen.

Ist $m+n > 180°$, so ist $\text{Sin.}(m+n)$ negativ; obige Hauptgleichung wird alsdann

$$y^2 = \frac{\text{Sin. m}}{\text{Cos.}\frac{1}{2}n^2} \cdot \text{Sin.}(m+n)x^2$$

$$= \frac{\text{Sin m} \cdot \text{Sin.}(m+n)x^2}{\text{Cos.}\frac{1}{2}n^2}$$

$$= a^2x^2$$

wenn man $\frac{\text{Sin. m} \cdot \text{Sin.}(m+n)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}n^2} = a^2$ setzt. Dies ist die Gleichung für zwey gerade Linien, die sich schneiden.

Die schneidende Ebene giebt also

1) für $c = 0$, drey Kegelschnitte, nämlich einen Punct, eine gerade Linie und zwey gerade Linien;

2) wenn c nicht $= 0$, abermals drey Kegelschnitte, nämlich eine Ellipse, Parabel und Hyperbel, je nachdem $m + n \lessgtr, = \text{oder} > 180°$ ist.

§. 243.

Da ich die gerade Linie hier als einen Kegelschnitt betrachte, so will ich die Betrachtung derselben noch etwas weiter verfolgen und einige hierher gehörige Aufgaben auflösen.

Aufgabe. Die Gleichung für eine gerade Linie zu finden, deren Neigungswinkel gegen die Abscissenlinie und die Entfernung des Durchschnittpuncts vom Anfangspunct der Abscissen bekannt ist.

Auflösung. Es sey PQ (Fig. 96) die gerade Linie, welche die Abscissenlinie CB unter dem Winkel $QCB = \alpha$ schneidet, A der Anfangspunct der Abscissen, $CA = d$, M sey irgend ein Punct der Linie PQ, die Coordinaten dieses Puncts oder $Mm = y$ und $Am = x$, so ist Mm oder $y = Cm \cdot \text{Tang.}\alpha = (CA + Am)$

Tang.

Tang.$\alpha = (d+x)$ Tang.$\alpha = d$ Tang.$\alpha +$ Tang.$\alpha\, x$.
Man nenne d Tang.$\alpha = b$ und Tang.$\alpha = a$, so ist $y = ax + b$.

Da diese Gleichung die Beziehung zwischen den Coordinaten des Puncts M und eines jeden andern Puncts, wenn x und y andere Werthe annehmen, ausdrückt: so ist sie die gesuchte Gleichung für die gerade Linie PQ.

§. 244.

Aufgabe. Aus der gegebenen Gleichung für eine gerade Linie deren Lage zu bestimmen.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sey

$$y = ax + b,$$

so ist $\frac{y-b}{x} = a = \text{Tang.}\alpha$ und

$$d = \frac{b}{\text{Tang.}\alpha} = \frac{b}{a}.$$

Erstere Gleichung giebt den Neigungswinkel, und wenn man diesen gefunden hat, so giebt die zweyte Gleichung den Anfangspunct der Abscissen.

§. 245.

Aufgabe. Die Gleichungen zweyer sich schneidenden geraden Linien sind gegeben; man sucht die Coordinaten ihres Durchschnittspuncts.

Auflösung. Es seyen (Fig. 97) PQ und pq die beyden geraden Linien, die sich in M schnei-

den,

den, die Buchstaben haben dieselbe Bedeutung, wie in der vorigen Figur, so ist die Gleichung für die Linie PQ

$$y = ax + b,$$

und für die Linie pq

$$y = a'x + b'.$$

Man soll den Durchschnittspunct M beyder Linien finden.

Der Durchschnittspunct M ist beyden Linien gemeinschaftlich; es müssen sich also für x und y solche Werthe finden lassen, die beyden Gleichungen genug thun. Die Coordinaten des gesuchten Durchschnittspuncts mögen x', y' heißen, so muß für diesen Punct $x = x'$ und $y = y'$ seyn, und aus obigen Gleichungen werden

$$y' = ax' + b, \quad y' = a'x' + b'$$

und daraus wird $x' = -\frac{b'-b}{a'-a}$, $y' = \frac{a'b-ab'}{a'-a}$.

Von der Parabel.

§. 246.

Die Parabel ist eine krumme Linie, deren Gleichung $y^2 = bx$ ist. Aus der Gleichung derselben läßt sich ihre Figur herleiten:

1) Für $y = 0$ ist $x = 0$, d. h. die Parabel schneidet die Axe im Anfange der Abscissenlinie, welcher der Scheitel der Parabel heißt.

2) $y = \pm\sqrt{bx}$, d. h. zu jeder Abscisse gehören zwey entgegengesetzte, aber gleiche Ordinaten; die Axe theilt also die Parabel in zwey gleiche Hälften.

3) Aus der Gleichung $y^2 = bx$ folgt, daß y^2 und folglich auch y mit x zugleich wächst, d. h. die Ordinaten wachsen mit den Abscissen ohne Ende; die Parabel läuft also nicht in sich selbst zurück.

4) Für $x = -x$ ist $y^2 = -bx$ und $y = \sqrt{-bx}$ unmöglich, d. h. für verneinte Abscissen sind die Ordinaten unmöglich oder die Parabel erstreckt sich nur nach der Seite der positiven Ordinaten mit zwey Schenkeln ohne Ende fort.

§. 247.

Die Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Abscisse und dem Parameter, oder der Parameter die dritte Proportionallinie zur Abscisse und Ordinate.

Beweis. Aus $y^2 = bx$ folgt $x : y = y : b$. Daraus folgt eine leichte Art, die Parabel zu zeichnen. Es sey (Fig. 98) AB der Parameter,

BC,

BC, BF beliebige Abscissen, und in C und F Perpendikel von unbestimmter Länge errichtet. Man suche nun zu AB und BC und AB und BF die mittlern Proportionallinien. Dies geschieht auf folgende Weise: man halbire AC, AF, beschreibe über AC und AF Halbkreise, welche das in B errichtete Perpendikel in E und H schneiden, ziehe durch E und H Parallellinien mit AF, welche CC', FF' in D, G schneiden, so liegen diese Puncte in der Parabel. Weil nämlich vermöge der Natur des Kreises BE, BH die mittlern Proportionallinien zwischen AB, BC und AB, BF sind und $BE = CD$ und $BH = GF$, so ist $DC^2 = y^2 = AB \cdot BC = bx$, und eben so $FG^2 = y^2 = AB \cdot BF = bx$. Man kann auf die Art so viel Puncte bestimmen als man will, und durch diese aus freier Hand die Parabel ziehen.

§. 248.

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die zugehörigen Abscissen.

Es sey für einen Punct der Parabel $y^2 = bx$ und für einen andern $y'^2 = bx'$, so ist $y^2 : y'^2 = bx : bx' = x : x'$, wenn man durch b dividirt. Ferner $y : y' = \sqrt{x} : \sqrt{x'}$, d. h. die

Or-

dinaten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Abscissen.

§. 249.

Der Brennpunct der Kegelschnitte heißt derjenige Punct der Axe, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist. Also $y^2 = bx$, aber $y = \frac{1}{2}b$ und $y^2 = \frac{1}{4}b^2$, folglich $\frac{1}{4}b^2 = bx$ und $\frac{1}{4}b = x$, d. h. die Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel der Parabel beträgt den vierten Theil des Parameters.

§. 250.

Eine gerade Linie vom Brennpunct nach einem beliebigen Punct eines Kegelschnitts heißt Zuglinie (radius vector).

Man nenne (Fig. 98) $BC = x$, $CD = y$, $BI = \frac{1}{4}b$, so ist I der Brennpunct und ID die Zuglinie. Es ist aber $ID^2 = IC^2 + CD^2 = (x - \frac{1}{4}b)^2 + y^2 = y^2 + x^2 - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}b^2$, aber $y^2 = bx$, folglich $ID^2 = bx + x^2 - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}b^2 = x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}b^2$, also $ID = x + \frac{1}{4}b$. Jede Zuglinie ist der Summe der Abscisse dieses Puncts und des vierten Theils des Parameters gleich.

§. 251.

Daraus läßt sich eine andere Methode zur Zeichnung der Parabel herleiten.

Man

Man ziehe die Axe der Parabel AD Fig. 99, AB sey der Parameter $=b$, $BF=\frac{1}{4}$. $AB=\frac{1}{4}b$, F also der Brennpunct. In C und D und in mehrern beliebig angenommenen Puncten errichte man senkrechte Linien von unbestimmter Länge, und schneide mit $BC+BF=x+\frac{1}{4}b$ aus F die senkrechte Linie CE in H, und mit $BD+BF=x+\frac{1}{4}b$ aus F die senkrechte Linie DG in I, so liegen H und I in der Parabel.

Um die zweyte Hälfte der Parabel zu zeichnen, darf man nur die Ordinaten unterhalb der Axe verlängern und diese jenen gleich machen.

§. 252.

Die Richtlinie (directrix) der Parabel ist ein Perpendikel auf der rückwärts verlängerten Axe in gleicher Entfernung vom Schenkel der Parabel, als der Brennpunct.

Jeder Punct der Parabel hat gleichen Abstand von der Richtlinie und dem Brennpunct.

Beweis. Es sey AN (Fig. 102) die Richtlinie, so ist $AB=BF=\frac{1}{4}b$, $MF=x+\frac{1}{2}b=BP+BF=BP+AB=AP=NM$.

§. 253.

Aufgabe. Man soll aus dem gegebenen Scheitel der Parabel die Axe finden.

Auf-

Auflösung Es sey A (Fig. 100) der Scheitel einer Parabel; man schneide aus demselben zu beyden Seiten gleiche Stücke AM = Am ab, ziehe die Linie Mm, halbire sie in P und ziehe AP, welche die verlangte Axe ist.

§. 254.

Aufgabe. Man soll aus der gegebenen Axe den Parameter finden.

Auflösung. Es sey AT die gegebene Axe. Man ziehe nach einem beliebigen Puncte M die Linie AM, auf sie die senkrechte MN und die senkrechte MP, so ist PN der gesuchte Parameter.

Im rechtwinklichten Dreyeck AMN ist AP : PM = PM : PN oder x : y = y : PN, also PN = b.

§. 255.

Aufgabe. Man soll aus dem gegebenen Scheitel den Brennpunct finden.

Auflösung. Man suche zuerst die Axe AT, daraus den Parameter PN und daraus $AF = \frac{1}{4} PN = \frac{1}{4} b$, so ist F der Brennpunct.

§. 256.

Aufgabe. Vermittelst der Parabel und des Kreises zu zwey gegebenen geraden Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Auf-

Auflösung. Es seyen a, b (Fig. 101) die beyden gegebenen geraden Linien. Man zeichne eine Parabel AM mit dem Parameter b, errichte in A die senkrechte Linie $AK = \frac{1}{2}a$, ziehe durch K die Parallele $KC = \frac{1}{2}b$ mit AQ und beschreibe aus C, als Mittelpunct, mit dem Halbmesser CA den Kreisbogen AEDM. Aus M, wo der Kreisbogen die Parabel schneidet, fälle man das Perpendikel MQ auf AQ, so sind $AQ = x$ und $QM = y$ die gesuchten mittlern Proportionallinien zwischen a und b.

Beweis. Die beyden Sehnen DM und AE werden durch die Perpendikel aus dem Mittelpuncte CB und CF in zwey gleiche Theile getheilt, so daß $BM = BD$ und $AF = FE$ ist; also $AE = 2AF = b$ und $EQ = AQ - AE = x - b$; $MB = QM - AK = y - \frac{1}{2}a$; $MD = 2BM = 2y - a$, $QD = QM - MD = y - 2y + a = a - y$. Aus der ebnen Geometrie ist bekannt, daß $AQ . EQ = MQ . DQ$ oder $x(x-b) = y(a-y)$ oder $x^2 - bx = ay - y^2$, aber $bx = y^2$, also $x^2 = ay$ oder $a : x = x : y$, d. h. x oder AQ ist die mittlere Proportionallinie zwischen der einen gegebenen Linie a und MQ. Weil ferner $y^2 = bx$ und $b : y = y : x$ oder y, d. h. MQ, die mittlere Proportionallinie zwischen b und AQ ist, so sind

AQ

AQ und QM die beyden gesuchten mittlern Proportionallinien zwischen a und b; denn

$$a : x = x : y$$
$$x : y = y : b.$$

§. 257.

Aufgabe. Man soll an einen gegebenen Punct der Parabel eine Tangente ziehen.

Auflösung. Der gegebene Punct sey M (Fig. 102). Man ziehe MF zum Brennpuncte, und mit der Axe der Parabel parallel die Linie MN, welche die Richtungslinie AN in N trifft. Man halbire den Winkel NMF durch die Linie TM, so ist diese die verlangte Tangente an M.

Beweis. Gesetzt, M wäre nicht der Berührungspunct, sondern ein anderer, etwa S. Man ziehe demnach SO, SN, SF, MP, NF. Da nach §. 252. MF = PA = MN und NMT = TMF, so ist x = y, DN = FD und NDM = FDM = R, folglich SN = FS. Aber SN > SO, also auch SF > SO; vermöge der Natur der Parabel ist indeß SF = SO, folglich liegt S nicht in der Parabel. Das nämliche läßt sich von einem jeden andern Puncte, der nicht M ist, erweisen; folglich ist M der Berührungspunct und TM die Tangente.

§. 258.

§. 258.

Die Linie TP zwischen dem Puncte T, wo die Tangente die verlängerte Axe der Parabel schneidet, und dem Puncte P, wo die Ordinate des Berührungspuncts M die Axe trifft, heißt die Subtangente; MQ, welche im Berührungspuncte auf der Tangente senkrecht steht und die Axe in Q trifft, die Normallinie, und PQ, zwischen dieser und der Ordinate PM, die Subnormallinie.

§. 259.

Die Subnormallinie PQ einer Parabel ist dem halben Parameter derselben gleich.

Nach §. 257. ist NF auf der Tangente TM senkrecht, aber auch MQ auf TM, also NF mit MQ parallel, aber auch NF = MQ, weil Parallellinien zwischen Parallellinien NM und FQ gleich sind. Daher sind die Dreyecke NAF und MPQ congruent; folglich $PQ = AF = AB + BF = 2BF = \frac{1}{2}b$, weil $BF = \frac{1}{4}b$ ist (§. 249).

§. 260.

Die Subtangente TP einer Parabel ist der doppelten Abscisse des Berührungspunctes M gleich, oder $TP = 2BP = 2x$.

In dem rechtwinklichten Dreyeck TMQ ist PQ : PM = PM : PT oder $\frac{1}{2}b : y = y : PT$ $= \frac{y^2}{\frac{1}{2}b} = \frac{bx}{\frac{1}{2}b} = \frac{2bx}{b} = 2x.$

§. 261.

Aufgabe. An einen beliebigen Punct der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man soll an den Punct M eine Tangente MT ziehen. Weil TP = 2BP (nach dem vorigen §.), so mache man TP = 2BP und lege durch die Puncte T und M eine gerade Linie, so ist das Verlangte geschehen.

§. 262.

Linien, die aus Puncten der Parabel mit der Axe derselben parallel gezogen werden, heißen Durchmesser.

§. 263.

Wenn man in einer Parabel (Fig. 103) eine Sehne LN parallel mit der Tangente TM an M und durch M einen Durchmesser MK ziehet, so theilt dieser die Sehne in zwey gleiche Theile oder LO = ON.

Beweis. Es sey BR die Axe der Parabel, F der Brennpunct; man ziehe durch die Puncte

N,

N, M, L die senkrechten Ordinaten NR, MQ und LP auf die Axe der Parabel BR und verlängere MK und LP rückwärts, bis sie sich in G schneiden. Man ziehe ferner OH senkrecht auf BR und nenne $BH = m$, $PH = GO = t$, $HR = OK = u$, $BQ = x$, $QM = y$, so ist $BP = m - t$, $BR = m + u$, $QH = m - x$,

Die Dreyecke TMQ und NOK sind ähnlich, weil $Q = G = K = R$ (rechte Winkel) und $T = GOL = NOK$, folglich $TQ : QM = OK : KN$ und $TQ : QM = OG : GL$ d. h. $2x : y = u : \frac{uy}{2x}$ und $2x : y = t : \frac{ty}{2x}$, weshalb $PL = PG - GL = y - \frac{ty}{2x}$ und $NR = KR + KN = y + \frac{uy}{2x}$; also $PL^2 = y^2 - \frac{ty^2}{x} + \frac{t^2y^2}{4x^2}$ und $NR^2 = y^2 + \frac{uy^2}{x} + \frac{u^2y^2}{4x^2}$. Es ist $QM^2 : NR^2 = BQ : BR$ und $QM^2 : PL^2 = BQ : BP$ d. i. $y^2 : y^2 + \frac{uy^2}{x} + \frac{u^2y^2}{4x^2} = x : m + n$ und $y^2 : y^2 - \frac{ty^2}{x} + \frac{t^2y^2}{4x^2} = x : m - t$; also auch $1 : 1 + \frac{u}{x} + \frac{u^2}{4x^2} = x : m + n$ und $1 : 1 - \frac{t}{x} + \frac{t^2}{4x^2} = x : m - t$, folglich $m + n = x + u + \frac{u^2}{4x}$ und $m - t = x - t + \frac{t^2}{4x}$. Subtrahirt man von

m

$$m+u=x+u+\frac{u^2}{4x}$$
$$m-t=x-t+\frac{t^2}{4x}$$
$$+\quad -\quad +\quad -$$

so hat man $u+t=u+t+\frac{u^2-t^2}{4x}$.

Folglich ist $\frac{u^2-t^2}{4x}=0$ oder $u^2-t^2=0$, also $u^2=t^2$ und $u=t$ oder GO=OK, mithin auch OL=ON.

§. 264.

Linien, wie LO und ON, die mit einer Tangente, z. B. TM, parallel gezogen sind, heißen Ordinaten des Durchmessers durch M und machen schiefe Winkel mit demselben, nur die Ordinaten der Axe stehen auf demselben senkrecht.

Viermal der Abstand des Scheitelpuncts M der Parabel für den Durchmesser MK von dem Brennpuncte derselben, oder 4MF, heißt der Parameter des Durchmessers MK.

§. 265.

Das Quadrat einer jeden Ordinate LO des Durchmessers MK ist dem Rechteck aus dem Parameter dieses Durchmessers 4MF und der zur gedachten Ordinate gehörenden Abscisse MO gleich, oder $LO^2=4MF.MO$.

Beweis. Man behalte die vorigen Benennungen (§. 263) bey und nenne $BF=\frac{1}{4}b$,

$MF = b$, $LO = z$, $MO = m - x = v$. Da erwiesen ist, daß $u = t$ und $m + n = x + u + \frac{u^2}{4x}$, so bringe man diesen Werth von u in die Gleichung, so hat man

$$m + t = x + t\frac{+t^2}{4x} \text{ und}$$

$$m - t = x - t\frac{+t^2}{4x}$$

$$2m = 2x + \frac{2t^2}{4x}, \text{ also}$$

$$m = x + \frac{t^2}{4x}$$

$$4mx = 4x^2 + t^2 \text{ und}$$

$$4mx - 4x^2 = 4(m-x)x = t^2$$

$$= 4vx.$$

Nun ist $LO^2 = GL^2 + GO^2$ oder $z^2 = t^2 + \frac{t^2 y^2}{4x^2}$ und da $y^2 = bx$, so ist $z^2 = 4vx + \frac{4vx \cdot bx}{4x^2}$ $= 4vx + \frac{4bvx^2}{4x^2} = 4vx + bv = (4x + b)v$ $= (4BQ + 4BF) \cdot MO = 4(BQ + BF) \cdot MO = 4MF \cdot MO$, weil $MF = BQ + BF = x + \frac{1}{4}b$; also $LO^2 = 4MF \cdot MO$.

Die Gleichung der Parabel $y^2 = bx$ ist also auch für jeden beliebigen Durchmesser wahr, wenn b der Parameter des Durchmessers, und x und y Ordinaten desselben sind. Also ist auch der Parameter des Durchmessers die dritte Proportionallinie

linie zur Abscisse und Ordinate, oder $4MF : LO = LO : MO$.

§. 266.

Wenn man von einem Puncte N der Parabel ein Perpendikel NK auf den Durchmesser MK und die Ordinate NL ziehet, so ist $NK^2 = b \cdot MO$, wenn b der Parameter der Axe ist.

Beweis. Aus dem vorigen §. ist $m = x + \frac{t^2}{4x} = x + \frac{u^2}{4x}$, $m - x = \frac{u^2}{4x}$, $(m-x)\,y^2 = \frac{u^2 y^2}{4x}$; aber $y^2 = bx$, also $(m-x)\,bx = \frac{u^2 y^2}{4x}$ und $(m-x)b = \frac{u^2 y^2}{4x^2}$ d. i. $b \cdot MO = NK^2$, weil $NK = \frac{ty}{2x} = \frac{uy}{2x}$. (§. 263).

Von der Ellipse.

§. 267.

Diejenige krumme Linie, der die Gleichung $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ angehört, heißt eine Ellipse. b heißt der Parameter und a die große Axe.

Aus der Gleichung der Ellipse läßt sich ihre Gestalt herleiten:

1) Wenn $y = o$, so wird entweder $x = o$ oder $x = a$, d. h. die Ellipse hat zwey Scheitel A und B, in deren einem die Abscisse $= o$, in dem andern $= a$ ist. (Fig. 104)

2) Da $y = \pm\sqrt{\left(bx - \frac{bx^2}{a}\right)}$, so gehören zu jeder Abscisse, z. B. AP, zwey entgegengesetzte gleiche Ordinaten PM, Pm. Die Ellipse ist demnach eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, welche von der Axe AB halbirt wird.

3) Wird die große Axe $a = \infty$, so ist $y^2 = bx - \frac{bx^2}{\infty}$. Da aber ein Bruch, dessen Nenner unendlich ist, verschwindet oder $= o$ ist, so ist in diesem Fall $y^2 = bx$, welches die Gleichung für die Parabel ist. Demnach ist eine Ellipse, deren Axe unendlich ist, als eine Parabel anzusehen.

4) Für kleine x verschwindet ebenfalls $\frac{bx^2}{a}$ und y^2 wird $= bx$, d. h. kleine Bogen der Ellipse und Parabel sind wenig unterschieden; besonders wenn a sehr groß angenommen wird.

§. 268.

In einer Ellipse verhält sich das Quadrat jeder Ordinate zu dem Rechteck aus den Abschnit-

schnitten der großen Axe wie der Parameter zur großen Axe.

Beweis. Aus der Gleichung $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ folgt $ay^2 = abx - bx^2 = x(a-x)b$ und $y^2 : x(a-x) = b : a$. Es sey nun $x = AP$, so ist $y^2 = PM^2$ und $PB = a - x$; folglich

$$PM^2 : AP \,.\, PB = b : a.$$

§. 269.

Die Quadrate der Ordinaten der Ellipse verhalten sich wie die unter den Abschnitten der großen Axe enthaltenen Rechtecke.

Beweis. Zweyer beliebigen Abscissen x, X Ordinaten mögen y, Y heißen, so ist

$$y^2 : x(a-x) = b : a \quad (§.\ 268)$$
$$Y^2 : X(a-X) = b : a; \text{ folglich}$$
$$y^2 : Y^2 = x(a-x) : X(a-X).$$

Es sey $x = AP$, $X = AQ$, so ist $PM^2 : QN^2 = AP \,.\, PB : AQ \,.\, QB$.

§. 270.

Die Mitte der großen Axe C (Fig. 104) heißt der Mittelpunct der Ellipse; ein Perpendikel Dd durch den Mittelpunct derselben heißt ihre kleine Axe, c.

Setzt

Setzt man $x = \frac{1}{2}a$, so ist $y^2 = \frac{1}{2}ab \mp \frac{\frac{1}{4}ba^2}{a}$ $= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab$ und $y = \pm\frac{\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}c$; also $c = \sqrt{ab}$ oder $c^2 = ab$ und $a : c = c : b$. Die kleine Axe ist demnach die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Axe und dem Parameter, und dieser die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Axe.

§. 271.

Aufgabe. Man soll eine Gleichung für die Ellipse finden, in der die große und kleine Axe vorkommen.

Auflösung. Weil, wie im vorigen §. gefunden, $c^2 = ab$ und $\frac{c^2}{a} = b$, so bringe man diesen Werth des Parameters in die Gleichung der Ellipse, so hat man

$$y^2 = \frac{c^2}{a}x - \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$= \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2),$$

in welcher Gleichung die große Axe a und die kleine Axe c vorkommen.

§. 272.

In der Ellipse verhält sich das Quadrat jeder Ordinate zu dem Rechteck aus den Abschnit-

schnitten der großen Axe, wie das Quadrat der kleinen zum Quadrat der großen Axe.

Beweis. Aus der Gleichung des vorigen § $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax-x^2)$ folgt $a^2y^2 = c^2(ax-x^2)$ und $y^2 : ax-x^2 = c^2 : a^2$ oder $y^2 : x(a-x) = c^2 : a^2$. Man setze demnach $AP = x$, $PM = y$ und $PB = a-x$, so ist $PM^2 : AP \,.\, PB = c^2 : a^2$.

§. 273.

Man beschreibe aus dem Mittelpunct der Ellipse C einen Kreis oder Halbkreis AM'B mit der halben großen Axe der Ellipse, so ist $PM'^2 = AP \,.\, PB$ oder $z^2 = x(a-x)$. Nun ist aber nach dem vorigen §

$y^2 : x(a-x) = c^2 : a^2$, folglich
$y^2 : z^2 = c^2 : a^2$ und
$y : z = c : a$ oder
$a : c = z : y$,

d. h. die zusammen gehörenden Ordinaten verhalten sich also wie die Axen.

§. 274.

Aufgabe. Aus der gegebenen großen (a) und kleinen Axe (c) einer Ellipse dieselbe zu zeichnen.

Auflösung. Man beschreibe mit der gegebenen großen Axe $AB = a$ (Fig. 105) einen

Kreis,

Kreis, errichte in C eine senkrechte Linie DE und trage von C aus $CF = CG = c$, so liegen F und G in der Ellipse. Um nun jeden andern Punct der Ellipse, z. B. M oder $PM = y$, zu finden, mache man $a : c = z : y$ oder $y = \frac{c}{a} . z$. Auf diese Art kann man so viele Puncte der Ellipse finden, als man will, und durch diese Puncte aus freier Hand die krumme Linie ziehen, welche die Ellipse wird.

Setzt man in der Gleichung für die Ellipse $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$ $c = a$, so wird $y^2 = \frac{a^2}{a^2}(ax - x^2) = ax - x^2$, welches die Gleichung für den Kreis ist.

§. 275.

Aufgabe. Aus dem Mittelpuncte C (Fig. 105) der Ellipse, von der die Figur nur das Stück AMF vorstellt, ist mit der großen Axe $AB = a$ ein Kreis beschrieben; man soll den Unterschied der zusammen gehörenden Ordinaten PM, PM′ oder MM′ finden.

Auflösung. Aus der Gleichung des Kreises $z^2 = x(a - x) = ax - x^2$ folgt $PM'^2 = AP . PB$; aus der Gleichung für die Ellipse $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$ folgt $PM^2 = \frac{c^2}{a^2} AP . PB$;

also $z = \sqrt{(ax - x^2)}$ und $y = \frac{c}{a}\sqrt{(ax - x^2)}$ und $z - y = \sqrt{(ax - x^2)} - \frac{c}{a} \cdot \sqrt{(ax - x^2)} = \left(1 - \frac{c}{a}\right) \cdot \sqrt{(ax - x^2)} = MM' \cdot c$ ist kleiner als a oder $c < a$; je mehr c sich a nähert, je mehr nähert sich $\frac{c}{a}$ der Einheit, und der Factor $1 - \frac{c}{a}$ wird kleiner, also auch MM'. Je weniger also große und kleine Axe der Ellipse unterschieden sind, desto ähnlicher ist sie einem Kreise, der mit der großen Axe beschrieben worden.

Wird $c = a$, so wird $1 - \frac{c}{a} = 0$ und folglich auch das Product oder $MM' = 0$, d. h. die Ellipse verwandelt sich in einen Kreis um AB.

§. 276.

Aufgabe. Durch den Punct A (Fig. 106) geht eine Ellipse AK und eine Parabel AL, die beyde gleichen Parameter $= b$ haben. Man soll für einerley Abscisse $AO = x$ den Unterschied der beyden Ordinaten $OL = z$ und $OK = y$ oder $OL - OK = KL$ finden.

Auflösung. Aus der Gleichung der Ellipse (§. 267) $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ folgt $y^2 = bx\left(1 - \frac{x}{a}\right)$

und

und $y = \sqrt{bx}\left(1-\frac{x}{a}\right)$ und aus der Gleichung der Parabel $z = \sqrt{bx}$; folglich $z-y = KL$

$$= \sqrt{bx} - \sqrt{bx}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

$$= \sqrt{bx}\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right).$$

Wenn x wächst (und x kann so lange wachsen, bis $x = a$ wird), wird $1-\frac{x}{a}$ kleiner, weil $\frac{x}{a}$ größer und mithin der Unterschied $1-\frac{x}{a}$ abnimmt; folglich wird $1-\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ größer; aber $\sqrt{bx}$ wächst auch, folglich auch das Product $z-y$. Für große x ist also ein bedeutender Unterschied zwischen den Ordinaten der Ellipse und Hyperbel.

Nimmt x hingegen sehr ab, so nimmt der Bruch $\frac{x}{a}$ ab, $1-\frac{x}{a}$ wird also größer, der Factor $1-\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ also kleiner und der zweyte Factor $\sqrt{bx}$ auch, das ganze Product $z-x$ wird also kleiner.

Bey einer sehr langen Axe der Ellipse sind also die Bogen der Ellipse und Hyperbel in der Nähe des gemeinschaftlichen Scheitels wenig unterschieden.

§. 277.

§. 277.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Ellipse aus dem Mittelpunct zu finden.

Auflösung. Man nenne (Fig. 104) $CP = u$, so ist $AP = x = \frac{1}{2}a - u$ und $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - au + u^2$.

Diesen Werth setze man in die Gleichung

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2) \quad (\S. 271)$$

so bekommt man

$$y^2 = \frac{c^2}{a}(\tfrac{1}{2}a - u) - \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - au + u^2)$$

$$= \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 u}{a} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2 u}{a} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

$$= \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 c^2}{4a^2} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$$

$$= \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2).$$

Man bringe die Werthe von

$$x = \tfrac{1}{2}a - u \quad \text{und}$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - au + u^2$$

in die Gleichung ($\S. 267$) $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, so bekommt man

$$y^2 = b(\tfrac{1}{2}a - u) - \frac{b}{a}(\tfrac{1}{4}a^2 - au + u^2)$$

$$= \frac{ba}{2} - bu - \frac{ba}{4} + au - \frac{bu^2}{a}$$

$$=$$

$$= \frac{ba}{4} - \frac{bu^2}{a}$$

$$= \frac{ba^2}{4a} - \frac{bu^2}{a}$$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - u^2\right).$$

Die eben gefundenen Gleichungen lassen sich in folgende Proportionen auflösen:

$$y^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - u^2 = c^2 : a^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 : (\tfrac{1}{2}a + u) \cdot (\tfrac{1}{2}a - u) = c^2 : a^2,$$

Und $y^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - u^2 = b : a$ oder

$$y^2 : (\tfrac{1}{2}a - u) \cdot (\tfrac{1}{2}a + u) = \frac{c^2}{a} : a$$

$$= c^2 : a^2.$$

Also verhält sich auch hier das Quadrat jeder Ordinate zu dem Rechteck aus den Abschnitten der großen Axe, wie das Quadrat der kleinen zum Quadrat der großen Axe.

Aus der Gleichung $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - u^2)$

$$= \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2} \quad \text{und}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}\right)}$$

folgt, daß zu gleichen u gleiche y gehören; die Ellipse wird also von der kleinen Axe eben so in zwey gleiche Theile getheilt, wie von der großen Axe.

Für $u = o$ ist $y^2 = \frac{c^2}{4}$ und $y = \frac{1}{2}c$, d. h. die Ordinate ist der halben kleinen Axe gleich; wächst

u

u oder wird u größer als o, so wächst auch u^2 und was in der Parenthese enthalten ist, wird kleiner, folglich auch y; wird $u = \frac{1}{2}a$, so ist $\frac{1}{4}a^2 - u^2 = o$, der eine Factor und mithin das ganze Product wird $= o$, also $y^2 = o$ und $y = o$; nimmt man $u > \frac{1}{2}a$ an, so wird der eine Factor, mithin das ganze Product negativ und y unmöglich.

Ueber A und B hinaus, ist also von der Ellipse nichts befindlich.

§. 278.

Aufgabe. Man soll die Eccentricität der Ellipse, oder die Entfernung des Brennpuncts vom Mittelpuncte oder $F = e$ finden.

Auflösung. Weil der Brennpunct derjenige Punct der Axe ist, wo die Ordinate dem halben Parameter gleich ist, so ist $y = \frac{1}{2}b$, oder $y^2 = \frac{1}{4}b^2$, aber $b = \frac{c^2}{a}$, folglich $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$. Aber $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - u^2)$ (§. 271) $= \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{a^2} \cdot CF^2$.

Man setze beyde Werthe von y^2 gleich, so hat man

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{a^2} \cdot CF^2 \text{ oder}$$

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot CF^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^4}{4a^2}, \text{ folglich}$$

c^2

$$c^2 \cdot CF^2 = \frac{a^2c^2}{4} - \frac{c^4}{4} \quad \text{und}$$

$$CF^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{4} \quad \text{und}$$

$$CF = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{(a^2 - ab)}}{2}.$$

Die Form der Gleichung deutet auf zwey Brennpuncte in gleicher Entfernung von C, oder es ist $CF = Cf$ und $FD = fD$, auch $AF = \frac{1}{2}a - e$ und $Af = \frac{1}{2}a + e$.

§. 279.

Die Summe der geraden Linien von irgend einem Puncte der Ellipse zu deren Brennpuncten ist der großen Axe gleich oder $FM + fM = a$.

Auflösung. Man ziehe das Perpendikel MP; man nenne $CF = e$ und $CP = u$, so ist $FP = CF - CF = e - u$; ferner $FM^2 = FP^2 + PM^2 = (e-u)^2 + y^2$

$$= e^2 - 2eu + u^2 + y^2, \quad \text{aber}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} \quad (\S.\ 277); \quad \text{folglich}$$

$FM^2 = e^2 - 2eu + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$; aber

e^2

$$e^2 = \frac{a^2-c^2}{4}; \text{ mithin}$$

$$FM^2 = \frac{a^2-c^2}{4} - u\sqrt{(a^2-c^2)} + u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2u^2}{a^2} - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{(a^2-c^2)}{a^2}u^2; \text{ folglich}$$

$$FM = \pm\frac{a}{2} \mp \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)}.$$

Auf eben die Art findet man

$$fM = \frac{a}{2} + \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)}.$$

Also $FM + fM$

$$= \frac{a}{2} - \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a}{2} + \frac{u}{a}\sqrt{(a^2-c^2)}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Darauf beruht die Art und Weise, eine Ellipse mittelst eines Fadens, der der großen Axe gleich ist und dessen Endpuncte in einer Ebene befestigt sind, durch einen Zug zu beschreiben.

§. 280.

Aufgabe. An einen gegebenen Punct M der Ellipse (Fig. 107) eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe Mf, verlängere sie nach N, bis NM = MF wird und halbire den Winkel NMF durch die Linie MT, so ist diese eine Tangente der Ellipse in M.

Be-

Beweis. Will man nicht zugeben, daß MT eine Tangente an M sey, so berühre sie die Ellipse noch in einem andern Puncte O und man ziehe Of, OF, ON. Da MN = MF, NMO = OMF, so ist, weil OM gemeinschaftlich, das Dreyeck NMO = FMO und NO = OF und NO + Of = OF + Of = Aa, in so fern der Punct O in der Ellipse liegt. Ferner ist FM + fM = Nf = Aa und also NO + Of = Nf, welches unmöglich ist.

§. 281.

Wenn die Tangente MT die Axe in T und die Ordinate PM die Axe in P schneidet, so ist CP : CA = CA : CT.

Man nenne CA = a, CF = Cf = t, CT = s, CP = x, so ist $FM = a - \frac{tx}{a}$, $fM = a + \frac{tx}{a}$, FT = s − t, fT = s + t. Man ziehe FN und fE senkrecht auf TE, so sind die beyden Dreyecke EMf und NMD oder DMF ähnlich, folglich fM : FM = fE : FD = fT : FT, d. h.

$$a + \frac{tx}{a} : a - \frac{tx}{a} = s + t : s - t \text{ und}$$

$$a^2 : a^2 + tx = s : s + t, \text{ folglich}$$

$$a^2 s + a^2 t = a^2 s + txs \text{ und}$$

$$a^2 t = txs \text{ und}$$

$a^2 = xs$ und

$x : a = a : s$ d. h.

$CP : CA = CA : CT$.

§. 282.

Aufgabe. Die große Axe einer Ellipse und ein Punct M in derselben sind gegeben; man soll eine Tangente an diesen Punct ziehen.

Auflösung. Man fälle von M das Perpendikel MP herab und suche zu CP und der halben großen Axe CA die dritte Proportionallinie; diese trage man von C auf die verlängerte halbe große Axe CF nach T ab und ziehe TM, so ist diese die verlangte Tangente an M (§. 281).

§. 283.

Eine jede Linie CD (Fig. 108), die durch den Mittelpunct der Ellipse geht und deren Endpuncte in ihrer Peripherie liegen, heißt ein **Durchmesser der Ellipse.** Ziehet man einen Durchmesser EF parallel mit der Tangente CO, so ist FE der **conjugirte Durchmesser** zu dem Durchmesser CD. Eine jede Linie IS, welche mit dem conjugirten Durchmesser parallel gezogen wird und die Ellipse in I und S durchschneidet, heißt eine **Ordinate des Durchmessers** CD. Die dritte Proportionallinie zu zwey conjugirten Durchmessern ist der

Parameter desjenigen Durchmessers, der in der Proportion voranstehet.

§. 284.

AB und QR sind die Axen der Ellipse; CD ist ein Durchmesser; durch C lege man eine Tangente CO und mit derselben parallel durch den Mittelpunct G den conjugirten Durchmesser FE. Man fälle von C und E die senkrechten Ordinaten CK und EP auf die Axe, so ist $GK . KO = AK . KB$.

Beweis. Aus §. 281 ist $GK : GA = GA : GO$, oder wenn man $GA = a$, $GK = x$ und $KO = z$ nennt, $x : a = a : x + z$, folglich

$$x^2 + xz = a^2 \text{ und}$$

$$xz = a^2 - x^2, \text{ d. h.}$$

$$= (a + x) . (a - x) \text{ d. h.}$$

$$GK . KO = KB . AK.$$

§. 285.

In der Ellipse ist, wenn dieselbe Bezeichnung beybehalten wird, $GP^2 = AK . KB$.

Beweis. Man nenne $GP = f$. Aus §. 269 ist $AK . KB : AP . PB = KC^2 : PE^2$, ferner $a^2 = xz + x^2$ (§. 284), auch sind die beyden Dreyecke OCK und GPE ähnlich, weil $GPE = CKO = R$ und $O = PGE$ ist, mithin $KC^2 : PE^2$

=

$= KO^2 : PG^2$ und folglich $AK.KB : AP.PB = KO^2 : PG^2$ oder $xz : xz + x^2 - f^2 = z^2 : f^2$ und $xzf^2 = xz^3 + x^2z^2 - f^2z^2$ und $xf^2 = xz^2 + x^2z - f^2z$ und $xf^2 + f^2z = xz^2 + x^2z$ und $f^2(x+z) = xz(x+z)$ und $f^2 = xz$, d. h. $GP^2 = xz = AK.KB$.

Aus eben den Gründen ist auch $GK^2 = AP.PB$.

§. 286.

Wenn man IS parallel mit der Tangente CO ziehet, so ist $CH.HD : HI^2 = CD^2 : FE^2$.

Beweis. Man ziehe IN und HL parallel mit der Axe QR und HM parallel mit der Axe AB.

Man nenne $GK = x$, $KC = y$, $GA = a$, $KO = z$, $HM = LN = c$, $GL = g$, $GC = s$. Da die Dreyecke GKC und GLH ähnlich sind, so ist $GK : KC = GL : LH$ oder $x : y = g : \frac{gy}{x} = LH$. Ferner sind die Dreyecke COK und IHM ähnlich, weil bey K und M rechte Winkel und $COK = IHM$, folglich $KO : KC = HM : IM$ oder $z : y = c : \frac{cy}{z} = IM$. Aber $LH + IM = IN = \frac{gy}{x} + \frac{cy}{z}$ und $IN^2 = \frac{c^2y^2}{z^2} + \frac{2cgy^2}{xz} + \frac{g^2y^2}{x^2}$. Ferner $GN = LN - LG = c - g$ und $GN^2 = c^2 - 2cg + g^2$.

Es ist aber $AK.AB : AN.NB (= GB^2 - GN^2)$

$= KC^2 : IN^2$, d. h.

$$a^2 - x^2 : a^2 - c^2 + 2cg - g^2$$

$$= y^2 : \frac{a^2y^2 - c^2y^2 + 2cgy^2 - g^2y^2}{a^2 - x^2} = IN^2,$$

woraus man folgende Gleichung erhält, wenn man die Werthe von IN^2 gleich setzt:

$$\frac{c^2y^2}{z^2} + \frac{2cgy}{xz} + \frac{g^2y^2}{x^2} = \frac{a^2y^2 - c^2y^2 + 2cgy^2 - g^2y^2}{a^2 - x^2}$$

Aber $xz = a^2 - x^2$, folglich

$$\frac{c^2y^2}{z^2} + \frac{2cgy^2}{a^2 - x^2} + \frac{g^2y^2}{x^2} = \frac{a^2y^2 - c^2y^2 + 2cgy^2 - g^2y^2}{a^2 - x^2}$$ oder

$$\frac{c^2y^2}{z^2} + \frac{g^2y^2}{x^2} = \frac{a^2y^2 - c^2y^2 - g^2y^2}{a^2 - x^2}.$$

Man dividire durch y^2, so hat man

$$\frac{c^2}{z^2} + \frac{g^2}{x^2} = \frac{a^2 - c^2 - g^2}{a^2 - x^2}.$$

Man multiplicire durch x^2,

$$\frac{c^2x^2}{z^2} + g^2 = \frac{a^2x^2 - c^2x^2 - g^2x^2}{a^2 - x^2}$$ und

$$\frac{c^2x^2}{z^2} = \frac{a^2x^2 - c^2x^2 - g^2x^2 - a^2g^2 + g^2x^2}{a^2 - x^2},$$ und

$$\frac{c^2x^4}{z^2x^2} = \frac{c^2x^4}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{a^2x^2 - c^2x^2 - a^2g^2}{a^2 - x^2},$$ und

$$\frac{c^2x^4}{a^2 - x^2} = a^2x^2 - c^2x^2 - a^2g^2$$ und

$$c^2x^4 = a^4x^2 - a^2c^2x^2 - a^4g^2 - a^2x^4 + c^2x^4 + a^2g^2x^2$$

und

$$a^2c^2x^2 = a^4x^2 - a^2g^2 - a^2x^4 + a^2g^2x^2$$ und

c^2

$$c^2 = a^2 - x^2 + g^2 - \frac{a^2 g^2}{x^2}$$

$$= LN^2 = HM^2.$$

Die Dreyecke GKC und GHL sind ähnlich, weshalb $GK : GC = GL : GH$, d. h. $x : s = g : \frac{gs}{x} = GH$. Aber $CH.HD = GC^2 - GH^2 = s^2 - \frac{g^2 s^2}{x^2} = \frac{s^2 x^2 - g^2 s^2}{x^2}$. Da aber diese vier Größen

$$\frac{s^2 x^2 - s^2 g^2}{x^2} : a^2 - x^2 + g^2 - \frac{a^2 g^2}{x^2} = s^2 : a^2 - x^2$$

eine Proportion ausmachen, indem das Product der äußern Glieder dem Product der innern gleich ist, so ist auch

$CH.HD : HM^2 = GC^2 : AK.KB (= GP^2)$;

aber auch

$HM^2 : GP^2 = HI^2 : GE^2$, mithin

$CH.HD : HI^2 = GC^2 : GE^2 = CD^2 : FE^2$.

§. 287.

Die Summe der Quadrate beyder Axen in einer Ellipse ist gleich der Summe der Quadrate zweyer conjugirten Durchmesser.

Beweis. Wenn $GA = a$, $QG = b$, $KC = y$, $GK = x$, so ist $GP^2 = a^2 - x^2$ (§. 285) und $GA^2 - GP^2 = AP.PB = GK^2 = x^2$. Nun ist $GA^2 : GQ^2 = AP.PB : PE^2$, d. h. $a^2 : b^2 =$

x^2

$x^2 : \frac{b^2x^2}{a^2}$ und $GA^2 : GQ^2 = AK.KB : KC^2$ d. i. $a^2 : b^2 = a^2 - x^2 : \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$. Aber $GP^2 + PE^2 = EG^2$ d. ist $a^2 - x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} = EG^2$ und $GK^2 + KC^2 = GC^2$ oder $x^2 + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = GC^2$, so ist $EG^2 + GC^2 = a^2 - x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} + x^2 + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$ $= a^2 + \frac{a^2b^2}{a^2} = a^2 + b^2$ und folglich $AB^2 + QR^2 = FE^2 + CD^2$.

§. 288.

Aufgabe. Man soll in einer gegebenen Ellipse einen Durchmesser ziehen, den Mittelpunct bestimmen, den conjugirten Durchmesser zu dem ersten, so wie die beyden Axen finden. (Fig. 108)

1) Man ziehe in derselben zwey parallele Sehnen, theile sie in zwey gleiche Theile und ziehe durch diese Theilungspuncte die gerade Linie CD, so ist diese ein Durchmesser der Ellipse.

2) Man theile die Linie CD in G in zwey gleiche Theile und ziehe durch G, welches der Mittelpunct der Ellipse ist, EF parallel mit den Sehnen, so hat man den conjugirten Durchmesser zu dem vorigen.

3)

3) Man beschreibe aus dem Mittelpuncte der Ellipse einen Kreis, der die Ellipse in vier Puncten schneidet, und ziehe durch diese Puncte vier Sehnen, so sind solche mit den Axen parallel, die man demnach durch den Mittelpunct der Ellipse ziehen kann.

Von der Hyperbel.

§. 289.

Diejenige krumme Linie, der die Gleichung $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ zugehört, heißt die Hyperbel, wo b der Parameter und a die große Axe ist.

Setzt man in der Gleichung für die Ellipse a verneint, so bekommt man die Gleichung für die Hyperbel, weshalb man diese auch als eine Ellipse mit verneinter Axe ansieht. Alle Eigenschaften der Ellipse kommen auch der Hyperbel zu, wenn nur die Zeichen gehörig verändert werden.

§. 290.

Für $y = 0$ ist entweder $x = 0$ oder $bx + \frac{bx^2}{a} = 0$ d. h. $bx = -\frac{bx^2}{a}$ oder $abx = -bx^2$ oder $-a = x$. Wenn man also in A (Fig. 109) den Anfang der Abscissen annimmt und $AB = -a$ setzt,

so

so sind A und B Puncte in der Axe und der Hyperbel, folglich deren Scheitel.

Die Gleichung $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ läßt sich auch in $y^2 = \frac{bx}{a}(a+x)$ verwandeln, woraus sich folgende Betrachtungen herleiten lassen:

1) Für ein positives wachsende x ist y möglich und wächst;

2) Für ein negatives x, welches kleiner als a ist, ist der erste Factor $\frac{bx}{a}$ negativ, der zweyte $a - x$ positiv, folglich das Product negativ und y unmöglich, weil die Quadratwurzel aus einer negativen Größe unmöglich ist.

3) Für ein negatives x, welches größer als a ist, ist der erste Factor negativ, aber der zweyte auch, weil $-x > a$, folglich beyde Factoren negativ. Das Product ist also positiv und y möglich.

Daraus folgt, daß zwischen A und B nichts von der Hyperbel vorhanden. Rechts von B und links von A giebt es zwey congruente, entgegengesetzte Hyperbeln, die eigentlich aber nur eine einzige Hyperbel ausmachen. Die Hyperbel ist übrigens keine in sich selbst zurückkehrende krumme

Linie, sondern sie geht zu beyden Seiten mit auseinander gehenden Schenkeln ohne Ende fort.

Weil $y = \pm\sqrt{(bx + \frac{bx^2}{a})}$, so giebt es für eine und dieselbe Abscisse zwey gleiche entgegengesetzte Ordinaten. Die verlängerte Axe AB theilt demnach die Hyperbel ist zwey congruente Hälften.

§. 291.

In der Hyperbel verhält sich das Quadrat jeder Ordinate zu dem Rechteck aus der um die Abscisse vergrößerten Axe und der Abscisse, wie der Parameter zur Axe.

Beweis. Die Gleichung der Hyperbel $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ läßt sich in die Proportion $y^2 : (a+x)x = b : a$ auflösen; denn $ay^2 = abx + bx^2$ oder $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$.

§. 292.

In der Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweyer Ordinaten wie die unter den Abscissen enthaltenen Rechtecke.

Beweis. Für x, X heißen die Ordinaten y, Y, so ist nach dem vorigen §.

$y^2 : (a+x)x = b : a$

$Y^2 : (a+X)X = b : a$, folglich

$y^2 : Y^2 = (a+x)x : (a+X)X$.

§. 293.

§. 293.

Die Mitte der großen Axe heißt der Mittelpunct der Hyperbel, und ein Perpendikel in demselben $= c = \sqrt{ab}$ heißt, nach Aehnlichkeit der Ellipse, die kleine Axe.

§. 294.

In der Hyperbel verhält sich das Quadrat einer Ordinate zu dem Rechteck unter den Abscissen, wie das Quadrat der kleinen zum Quadrat der großen Axe oder $y^2 : x(a+x) = c^2 : a^2$.

Beweis. In die Formel $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ bringe man aus dem vorigen §. den Werth von $b = \frac{c^2}{a}$, so hat man

$$y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$= \frac{ac^2x + c^2x^2}{a^2} \quad \text{und}$$

$$a^2y^2 = ac^2x + c^2x^2$$

$$= c^2x(a+x), \quad \text{folglich}$$

$$y^2 : x(a+x) = c^2 : a^2.$$

§. 295.

Aufgabe. Eine Hyperbel zu zeichnen.

Auflösung. Aus der Proportion $a^2 : c^2 = x(a+x) : y^2$ folgt $a : c = \sqrt{x(a+x)} : y$.

Man

Man nenne das dritte Glied g, so ist a : c = g : a + x.

Daraus lassen sich folgende Regeln zur Zeichnung einer Hyperbel herleiten:

1) Man suche zu einer beliebig angenommenen Axe der Hyperbel, nebst einer beliebigen Abscisse x und der Abscisse selbst, oder zu a + x und x die mittlere Proportionallinie g.

2) Suche zu der großen und kleinen oder der halben großen und kleinen Axe und g die vierte Proportionallinie, so ist diese eine Ordinate der Hyperbel und ihr Endpunct liegt in der Hyperbel.

3) Auf die Art bestimmt man so viele Puncte als man will, und ziehet durch diese aus freier Hand die Hyperbel.

Es sey z. B. AB = a als die große, und CD als die kleine Axe der Hyperbel gegeben, welche einander rechtwinklicht in C und in gleiche Theile zerschneiden. Man nehme AP = x als beliebige Abscisse an, beschreibe mit $AC + AP = \frac{AB}{2} + AP = \frac{a}{2} + x$ einen Halbkreis und errichte in A eine senkrechte Linie, welche den Halbkreis in N schneidet, so ist PA : AN = AN : Ap d. h.

$x : AN = AN : a+x$; also $AN^2 = x(a+x)$ und $AN = \sqrt{x(a+x)} = g$.

Man ziehe nun PM parallel mit AN und suche zu CA, CD, AN die vierte Proportionallinie oder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = g : y$ oder $a : c = g : y$ und trage diese von P nach M, so ist M ein Punct der Hyperbel; denn

$$y = \frac{cg}{a} \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{c^2 g^2}{a^2}$$

$$= \frac{c^2 . x(a-x)}{a^2} \text{ oder}$$

$$a^2 y^2 = c^2 . x(a-x) \text{ und}$$

$$y^2 : x(a-x) = c^2 : a^2.$$

§. 296.

Aufgabe. Man soll eine Gleichung für die Hyperbel durch die große und kleine Axe finden.

Auflösung. In die Gleichung $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ bringe man für b seinen Werth durch die kleine und große Axe ausgedrückt oder $= \frac{c^2}{a}$, so hat man

$$y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2 x^2}{a^2}.$$

In dieser Gleichung kommen vier Größen vor,

vor, deren jede man durch die drey andern ausgedrückt finden kann:

1) $y = \sqrt{\left(\frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{ac^2x + c^2x^2}{a^2}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2}(ax + x^2)\right)}$

$= \frac{c}{a}\sqrt{(ax + x^2)}.$

2) $\frac{c^2x^2}{a^2} + \frac{c^2}{a}x = y^2$

$x^2 + ax = \frac{a^2y^2}{c^2}$

$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{a^2y}{c^2} + \frac{1}{4}a^2$

$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{a^2y^2 + \frac{1}{4}a^2c^2}{c^2}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2}(y^2 + \frac{1}{4}c^2)\right)}$

$= \frac{a}{c} \cdot \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ und

$x = -\frac{1}{2}a \pm \frac{a}{c}\sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}c^2)}.$

3) $a = \frac{c^2x}{2y^2} + \frac{cx}{y^2}\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + y^2)}.$

4) $c = \frac{ay}{\sqrt{(ax + x^2)}}.$

§. 297.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel aus dem Mittelpuncte zu finden.

Auf-

Auflösung. Man nenne die Abscisse CF $= u$, so ist $AP = x = u - \frac{1}{2}a$ und $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$. Diesen Werth von x^2 bringe man in die Gleichung

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2},$$ so hat man

$$y^2 = \frac{c^2(u-\frac{1}{2}a)}{a} + \frac{c^2(u^2-au+\frac{1}{4}a^2)}{a^2}$$

$$= \frac{ac^2(u-\frac{1}{2}a)+c^2(u^2-au+\frac{1}{4}a^2)}{a^2}$$

$$= \frac{ac^2u-\frac{1}{2}a^2c^2+c^2u^2-ac^2u+\frac{1}{4}a^2c^2}{a^2}$$

$$= \frac{c^2u^2-\frac{1}{4}a^2c^2}{a^2}$$

$$= \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$$

$$= \frac{c^2}{a^2}\left(u^2 - \frac{a^2}{4}\right).$$

Daraus folgt $a^2y^2 = c^2\left(u^2-\frac{a^2}{4}\right)$ und $y^2 : u^2 - \frac{a^2}{4} = c^2 : a^2$ oder $y^2 : (u+\frac{1}{2}a).(u-\frac{1}{2}a) = c^2 : a^2$ und $Y^2 : (U+\frac{1}{2}a).(U-\frac{1}{2}a) = c^2 a^2$ und $y^2 : Y^2 = (u+\frac{1}{2}a).(u-\frac{1}{2}a) : (U+\frac{1}{2}a).(N-\frac{1}{2}a)$: welches wieder obiger Satz (§. 292) ist.

§. 298.

Aufgabe. Man soll die Entfernung des Brennpuncts vom Mittelpuncte der Ellipse oder CF finden.

Auflösung. Nach dem vorigen §. ist

y^2

$$y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 = \frac{c^2}{b^2}\, cF^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Weil aber die Ordinate des Brennpuncts dem halben Parameter oder $y = \frac{1}{2}b$ ist, so ist $y^2 = \frac{1}{4}b^2$; also

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot CF^2 - \frac{1}{4}c^2, \quad \text{aber}$$

$$c^2 = ab \quad \text{und}$$

$$\frac{c^2}{a} = b, \quad \text{also}$$

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}b; \quad \text{mithin}$$

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot CF^2 - \frac{1}{4}c^2$$

$$\frac{c^4}{4a^2} + \frac{1}{4}c^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot CF^2$$

$$\frac{c^4 + a^2c^2}{4a^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot CF^2$$

$$\frac{c^4 + a^2c^2}{4a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = CF^2, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{c^2 + a^2}{4} = CF^2 \quad \text{und}$$

$$\pm\frac{\sqrt{(c^2+a^2)}}{2} = CF.$$

Weil CF einen doppelten Werth hat, so hat die Hyperbel zwey Brennpuncte in gleicher Entfernung vom Mittelpuncte.

Es ist $AF = CF - CA = \frac{\sqrt{(c^2+a^2)}}{2} - \frac{a}{2}$

$$= \frac{\sqrt{(c^2+a^2)} - a}{2}.$$

§. 299.

§. 299.

Wenn man von einem Puncte der Hyperbel nach beyden Brennpuncten gerade Linien ziehet, so ist deren Unterschied der großen Axe gleich oder $fM - FM = Aa = a$. (Fig. 110)

Man nenne $AC = a$, $CB = b$, $CP = x$, $PM = y$, so ist $PF = CP - CF = x - \sqrt{(a^2+b^2)}$, weil $CF = AB$, $Pf = CP + Cf = x + \sqrt{(a^2+b^2)}$. Folglich

$$FM^2 = PM^2 + PF^2$$
$$= y^2 + x^2 - 2x\sqrt{(a^2+b^2)} + a^2 + b^2,$$

aber $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$ (§. 297, wenn man $u = x$, $b = \frac{1}{2}c$, $a = \frac{1}{2}a$ nennt)

$$= \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 + x^2 - 2x\sqrt{(a^2+b^2)} + a^2 + b^2$$
$$= a^2 + x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - 2x\sqrt{(a^2+b^2)}$$

$$fM^2 = PM^2 + Pf^2$$
$$= y^2 + x^2 + 2x\sqrt{(a^2+b^2)} + a^2 + b^2$$
$$= \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 + x^2 + 2x\sqrt{(a^2+b^2)} + a^2 + b^2$$
$$= a^2 + x^2 + \frac{a^2x^2}{a^2} + 2x\sqrt{(a^2+b^2)}$$
$$= a^2 + \frac{a^2x^2 + b^2x^2}{a^2} + 2x\sqrt{(a^2+b^2)}$$
$$= a^2 + \frac{(a^2+b^2)x^2}{a^2} + 2x\sqrt{(a^2+b^2)}$$
$$= \left(a + \frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}\right)^2, \quad \text{also}$$

fM

$$fM = a + \frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}.$$ Eben so

$$FM = -a + \frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a};$$ folglich

$$fM - FM = 2a = Aa.$$

§. 300.

Aufgabe. Die beyden Axen der Hyperbel sind gegeben; man soll die Hyperbel zeichnen.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf dem vorigen §.

1) Man suche die Brennpuncte, nämlich $CF = Cf = AB$.

2) Man nehme den Winkel AfD nach Gefallen an und mache $fD = Aa$.

3) Aus f, mit einem Halbmesser größer als fA, beschreibe man den Bogen EMm, welcher fD in E schneidet.

4) Diesen Bogen schneide man aus F mit $FM = ED$, so liegt M in der Hyperbel, deren Axen $2AC$ und $2CB$ sind.

§. 301.

Aufgabe. An einen gegebenen Punct der Hyperbel M (Fig. 111) eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von M nach den Brennpuncten F und f die beyden Linien MF und Mf und halbire den Winkel FMf durch die gerade Linie MT, so ist MT die verlangte Tangente.

Beweis. Wäre MT keine Tangente an M, so müßte sie es doch an irgend einem andern Puncte, z. B. m, seyn; man ziehe also die geraden Linien mF, Mf und mache $fD = Aa$, so ist $MD = MF$. Man ziehe FD, welche MT in G durchschneidet, so ist $DG = GF$ und bey G sind rechte Winkel. Daraus folgt, daß $mF = mD$ und $mF + Aa = mD + Df$, aber $mD + Df \rhd mf$ oder $mf \lhd mD + Df$, folglich $mf \lhd mF + Aa$ und also $mf - mF \lhd Aa$; der Punct m liegt also nicht in der Hyperbel und folglich ist MT eine Tangente der Hyperbel in M.

§. 302.

Wenn eine Tangente MT die große Axe in T und die kleine Axe in t schneidet und man ziehet die Ordinaten MP, Mp, so ist $CP : CA = CA : CT$ und $Cp : CB : CB = Ct$.

Beweis. Man ziehe aus den Brennpuncten F, f die geraden Linien FG, fg senkrecht auf die Tangente MT, so hat man

$$MF : Mf = TF : Tf \text{ und}$$

MF

$MF + Mf : MF = TF + Tf : TF$ oder

$MF + Mf : MF = Ff : TF$ oder

$$\frac{2x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} : \frac{x\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} - a = 2\sqrt{(a^2+b^2)} :$$

$$\frac{2x\sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(a^2+b^2)} - 2a^2\sqrt{(a^2+b^2)}}{2x\sqrt{(a^2+b^2)}} =$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)} - \frac{a^2}{x} = TF,$$

folglich $CT = CF - TF = \sqrt{(a^2+b^2)} - \sqrt{(a^2+b^2)} + \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{x} = \frac{AC^2}{CP}$; $CT = \frac{AC^2}{CP}$ d. h. $CP : AC$

$AC : CT$.

Ferner ist pM parallel mit CF und

$pM : CT = pt : Ct$ und

$pM - CT : CT = pC : Ct$, d. h.

$$x - \frac{a^2}{x} : \frac{a^2}{x} = y \left(= \frac{b\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right) : \frac{ab}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = CA.$$

Aber $Cp = b\sqrt{\frac{(x^2-a^2)}{a}}$ und $CB = b$ und

$Cp : CB = CB : \frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}}$, folglich auch

$Cp : CB = CB : CA$.

§. 303.

Aufgabe. Die große oder kleine Axe einer Hyperbel sind gegeben; man soll an einen gegebenen Punct M derselben eine Tangente ziehen.

Auflösung.

1) Man ziehe die Ordinate des Puncts M, nämlich PM;
2) Suche zu CP und CA die dritte Proportionallinie;
3) Setze diese von C nach T ab und ziehe TM, so ist diese die verlangte Tangente.

Der Beweis läßt sich aus dem vorigen §. herleiten.

§. 304.

Wenn man durch den Scheitelpunct der Hyperbel A (Fig. 112) eine Parallellinie FG mit der kleinen Axe ziehet und FA = AG = DC macht, die Linien CF, CG ziehet und sie vor- und rückwärts unbestimmt verlängert, so heißen diese geraden Linien die Asymptoten der entgegengesetzten Hyperbeln. Das Wort ist zusammengesetzt aus dem verneinenden ἀ, aus συν, mit oder zusammen und πιπτειν fallen.

§. 305.

Aufgabe. M ist ein Punct der Hyperbel, PM die Ordinate dieses Puncts und PM bis an die Asymptote verlängert; man soll MR finden.

Auf-

Auflösung. Man nenne $CP = u$, $PM = y$, $PR = z$, $Aa = a$ und $ED = c$, so ist $CA : AF = CP : PR$ oder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = a : c = u : z$ und $z = \frac{cu}{a}$. Aber $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$ (§. 297), folglich

$$z^2 - y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2u^2}{a^2} + \frac{1}{4}c^2, \text{ folglich}$$

$$z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2, \text{ aber}$$

$$z^2 - y^2 = (z+y) \cdot (z-y), \text{ also}$$

$$(z+y) \cdot (z-y) = \frac{1}{4}c^2 \text{ und}$$

$$z - y = \frac{c^2}{4(z+y)} = MR.$$

Wenn u wächst, wächst auch $4(z+y)$ und $z-y$ nimmt ab und wird immer kleiner, je größer u wird. MR kann aber nicht $= o$ werden, so lange u sich angeben läßt.

Daraus folgt, daß die Hyperbel sich zwar den Asymptoten immer mehr nähert, ohne sie jedoch zu erreichen, woher sich auch die Benennung dieser Linien — Niezusammenfallende — rechtfertigen läßt.

Da $MR = \frac{c^2}{4(z+y)}$ und $MS = MP + PS = y + z$, so ist $MR \cdot MS = \frac{c^2}{4(z+y)} \cdot (z+y) = \frac{c^2}{4}$, also unveränderlich.

§. 306.

§. 306.

Man ziehe MQ mit CS parallel, so ist $CQ \cdot QM = \frac{a^2+c^2}{16}$.

Die beyden Dreyecke RQM und CFG sind ähnlich und beyde gleichschenklicht, folglich $FG:CF = RM:RQ = MS:CQ$, folglich $RQ = QM = \frac{RM \cdot CF}{FG}$ und $CQ = \frac{MS \cdot CF}{FG}$, mithin $CQ \cdot QM = \frac{CF^2}{FG^2} \cdot RM \cdot MS$. Nun ist $CF^2 = \frac{a^2+c^2}{4}$ und $FG^2 = c^2$ und $RM \cdot MS = \frac{c^2}{4}$, folglich $CQ \cdot MQ = \frac{a^2+c^2}{4c^2} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{a^2+c^2}{16}$. Dies nennt man die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

Man ziehe AG′ parallel mit CG, so ist $G'AC = ACG = G'CA$, folglich $CG' = G'A$, folglich $CG^2 = CG' \cdot GA = \frac{a^2+c^2}{16}$. Dieses Quadrat heißt die Potenz der Hyperbel.

§. 307.

Wenn man nach Willkühr eine gerade Linie RS (Fig. 112) ziehet, welche die Hyperbel in M, H und die Asymptoten in R, S schneidet, so ist RM = HS.

Be=

Beweis. Man ziehe MQ und Hv den Asymptoten parallel, so ist

$$RM:MQ = RS:SC = HR:vC, \text{ also}$$

$$RM = \frac{MQ \cdot HR}{vC}$$

$$HS:Hv = RS:RC = MS:QC, \text{ folglich}$$

$$HS = \frac{Hv \cdot MS}{QC}.$$

Folglich ist $RM:HS = \frac{MQ \cdot HR}{vC} : \frac{Hv \cdot MS}{VC}$

$$= MQ \cdot HR \cdot QC = Hv \cdot MS \cdot vC.$$

Aber $MQ \cdot QC = Hv \cdot vC$, folglich

$$RM:HS = RH:MS$$
$$= MH+MR:MH+HS$$
$$= MH:MH, \text{ folglich}$$
$$RM = HS.$$

§. 308.

Eine Hyperbel, deren beyde Axen einander $c = a$, mithin auch dem Parameter gleich sind oder $a = b = c$, heißt gleichseitig, auch rechtwinklicht.

In diesem Fall ist $FA = AC$, folglich $ACG' = 45°$ und $FCG = 90°$.

Ferner ist $c^2 = ab$, folglich $b = \frac{c^2}{a}$, mithin für die gleichseitige Hyperbel, wo $c = a$, $b = \frac{c^2}{a} = a$ und $= c$.

§. 309.

§. 309.

Aufgabe. Eine Gleichung für die gleichseitige Hyperbel zu finden.

Auflösung. $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - \frac{1}{4}a^2)$ ist die Gleichung der Hyperbel aus dem Mittelpunct; setzt man nun $c = a$, so ist

$$y^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}a^2,$$

welches die Gleichung für die gleichseitige oder rechtwinklichte Hyperbel ist. Ist $\frac{1}{4}a^2 > u^2$ oder $\frac{1}{2}a > u$, so ist y unmöglich, d. h. es giebt in der gleichseitigen Hyperbel keine Ordinaten, deren Abscissen kleiner als die halbe große Axe sind.

§. 310.

Man beschreibe zwischen A und B (Fig. 113) mit dem $\frac{AB}{2} = AC$ einen Kreis, der die Hyperbel im Scheitel berührt und ziehe im Kreise eine beliebige Ordinate $DE = z$ und nenne $CD = u$ und $CA = CB = \frac{1}{2}a$, so ist $z^2 = (\frac{1}{2}a - u) \cdot (\frac{1}{2}a + u) = \frac{1}{2}a^2 - u^2$. Im Kreise giebt es also nur so lange mögliche Ordinaten, als $u < \frac{1}{2}a$; das Gegentheil findet in der Hyperbel Statt, wo für mögliche y $u > \frac{1}{2}a$ seyn muß.

§. 311.

§. 311.

Wenn man durch mehrere Puncte einer Hyperbel M, m, μ oder zweyer entgegengesetzten Hyperbeln die Linien QT, qt, $\chi\theta$, welche sich in den Asymptoten endigen, mit einander parallel ziehet, so sind die Rechtecke QM.MT, qm.mt, $\chi\mu.\mu\theta$ einander gleich.

Beweis. Man lege durch die Puncte M, m, μ parallele und auf der Axe senkrechte Linien, welche sich gleichfalls in den Asymptoten endigen, nämlich RS, rs, $\lambda\nu$, so ist das Dreyeck RMQ' dem Dreyeck rmq und MST dem Dreyeck mst ähnlich, folglich

$$RM : rm = Q'M : qm \quad \text{und}$$
$$MS : ms = MT : mt. \quad \text{folglich}$$
$$RM.MS : rm.ms = Q'M.MT : qm.mt.$$

Aber $RM.MS = rm.ms$ (§. 305), folglich

$$Q'M.MT = qm.mt.$$

§. 312.

Wenn man durch zwey Puncte M, μ einer Hyperbel oder zweyer entgegengesetzten Hyperbeln zwey gerade Linien MT, $\mu\theta$ mit einander parallel ziehet, und durch eben diese Puncte zwey andere Parallellinien MV, $\mu\varrho$ zie-

ziehet, so sind die Rechtecke QM . MT und $\varrho\mu$. $\mu\theta$ einander gleich.

Beweis. Die Dreyecke RQM und $\varrho\mu\lambda$, so wie MTS und $\mu\theta\nu$ sind ähnlich, folglich

$$RM : \lambda\mu = QM : \varrho\mu \text{ und}$$
$$MS : \mu\nu = MT : \mu\theta, \text{ folglich}$$
$$RM.MS : \lambda\mu.\mu\nu = QM.MT : \varrho\mu.\mu\theta; \text{ aber}$$
$$RM . MS = \lambda\mu . \mu\nu, \text{ folglich auch}$$
$$QM . MT = \varrho\mu . \mu\theta.$$

§. 313.

Aufgabe. Eine Hyperbel zwischen den Asymptoten zu zeichnen, wenn der Asymptotenwinkel und die Seite der Potenz der Hyperbel gegeben sind.

Auflösung. Man befolge nachfolgende Regeln:

1) Aus dem Asymptotenwinkel BCD (Fig. 114) und der Seite der Potenz der Hyperbel CD construire man eine Raute ABCD.

2) Man verlängere die Linie BA unbestimmt und nehme auf derselben mehrere Puncte E, F an.

3) Man ziehe die Linien CE, CF, welche AD in m und n schneiden.

4)

3) Man ziehe die Linien EP, FQ parallel mit der Asymptote CB auf die verlängerte CD und mache PM = Dm und QN = Dn, so sind die Puncte M, N in der Hyperbel (§. 306).

§. 314.

Die Parabel, Ellipse und Hyperbel lassen sich durch eine organische Beschreibung zeichnen. Unter organischer Beschreibung einer krummen Linie versteht man die Zeichnung derselben durch stetige Bewegung eines Puncts mittelst eines Werkzeugs, insbesondere wenn der Punct sich durch den Durchschnitt zweyer beweglichen geraden Linien ergiebt.

§. 315.

Aufgabe. Die Parabel durch eine organische Beschreibung zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man nehme ein Winkelmaaß GHN (Fig. 115) und befestige an N einen Faden NH = NM + MH = NM + MF und mache AG = AF.

2) Das andere Ende des Fadens befestige man im Puncte F.

3) Man lasse den Schenkel GH des Winkelmaaßes sich an der Linie GHh, die auf GP senkrecht ist, hinaufbewegen.

4)

4) Am Schenkel HN des Winkelmaaßes halte man einen Stift M und spanne mit demselben den Faden NMF, indem der andere Schenkel die erwähnte Bewegung macht, so wird der Stift die Parabel beschreiben.

Der Beweis dieser Zeichnung beruht darauf, daß $FM = AP + AF = AP + AG$ ist (§. 250).

§. 316.

Aufgabe. Die Ellipse durch eine organische Beschreibung zu zeichnen.

Auflösung. Ein Instrument, eine Ellipse durch stetige Bewegung eines Stifts zu beschreiben, heißt Ellipsograph.

Erste Methode. Die einfachste Methode ist folgende:

1) Man zeichne eine gerade Linie, welche die große Axe und deren Endpuncte die Scheitel der Ellipse vorstellen sollen;
2) Man bestimme die Brennpuncte auf derselben (§. 278);
3) Man nehme einen Faden, dessen Länge der großen Axe gleich ist, und befestige beyde Endpuncte desselben in den Brennpuncten.
4) Mit einem Stifte spanne man den Faden aus und führe ihn so um beyde Brennpuncte herum, so beschreibt er eine Ellipse.

Die-

Dieses Verfahren gründet sich auf die Eigenschaft der Ellipse, daß die Summe der Linien von den Brennpuncten zu jedem Puncte der Ellipse deren großen Axe gleich ist.

Zweyte Methode.

1) Zwey Liniale AB, DE (Fig. 116), mit einem Ausschnitte der Länge nach, werden unter einem rechten Winkel zusammengesetzt.
2) Ein drittes Linial MG enthält drey Stifte M, F, G, so daß MG die halbe große Axe $= a$ und MF die halbe kleine Axe $= b$ ist.
3) Den Stift F verschiebt man auf AB und den Stift G zu gleicher Zeit auf DE, so beschreibt der Stift M die verlangte Ellipse.

Daß die vom Stifte M beschriebene krumme Linie eine Ellipse ist, erhellet so:

Man ziehe MP senkrecht auf AC und MN parallel mit PC. Man nenne $GM = a$, $FM = b$, $CP = x$ und $PM = y$, so ist $MG : FG = MN : FC$ und $MF : FG = MP : CG$ oder $a : a-b = x : \frac{(a-b)x}{a} = FC$ und $b : a-b = y : \frac{(a-b)y}{b} = CG$. Aber $FG^2 = FC^2 + CG^2$ oder $(a-b)^2 = (a-b)^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, welches die Gleichung für die Ellipse ist, deren halbe große Axe $= a$ und die halbe kleine Axe $= b$ ist.

Setzt

Setzt man in die Gleichung §. 277 $b = \frac{1}{2}c$, $a = \frac{1}{2}a$, so bekommt man ebenfalls diese Gleichung.

§. 317.

Aufgabe. Die Hyperbel durch eine organische Beschreibung zu zeichnen.

Auflösung. C (Fig. 117) sey der Mittelpunct der zu zeichnenden Hyperbel, CA die halbe große Axe; AD die halbe kleine Axe, also CD die Richtung der einen Asymptote, die man beliebig nach S verlängert.

Man halbire CD in E und ziehe EA, so ist EA der andern Asymptote parallel.

Man setze drey Liniale FG, FN, GMA zusammen, so daß GFN dem Winkel der Asymptoten oder AED gleich sey, FGA aber von willkührlicher Größe, indem FG und AG sich um einen Stift in G drehen lassen. FG sey = CE.

Schiebt man nun das Linial FG auf CS hin, indem das Linial AG immer durch A geht, so beschreibt ein Stift an dem Durchschnitt der Ränder der Liniale AG, FN die Hyperbel längs der Asymptote CS.

Beweis. Da FG:FM = EG:EA und FG = CE und EG = CF, so ist CE : FM = CF : EA und CE . EA = FM . CF und mithin M ein Punct in der Hyperbel (§. 306).

Ach-

Achtes Kapitel.

Von Linien höherer Ordnungen.

§. 318.

Linien höherer Ordnungen sind solche, in deren Gleichungen eine höhere Potenz von x oder y als die zweyte vorkommt.

So ist, wie wir gleich sehen werden, die krumme Linie, welche man die Cissoide des Diokles nennt, von der dritten Ordnung, weil ihre Gleichung $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$.

Die Muschellinie oder Conchoide des Nikomedes ist von der vierten Ordnung, weil in deren Gleichung x^4 vorkommt.

§. 319.

Man beschreibe einen Kreis um AB und errichte in C die Linie CL senkrecht. Man nehme die gleichen Bogen LD und LF, ziehe die senkrechten Ordinaten DE und FG nnd die Chorden DA und FA. Die Chorde DA schneidet die Ordinate FG in H; die andere Chorde FA schneidet über F hinaus verlängert die andere über D hinaus verlängerte Ordinate in h.

Die-

Diese beyden Puncte H und h liegen in einer krummen Linie, welche die Cissoide heißt, deren Erfinder Diokles ist.

§. 320.

Aufgabe. Die Gleichung für die Cissoide des Diokles zu finden.

Auflösung. Im Kreise ist

$$AG : GF = GF : GB$$

$$GF : GB = GF : GB, \text{ also}$$

$$AG : GB = GF^2 : GB^2, \text{ aber}$$

$$AG : GH = AE : ED \text{ und, weil } AE = GB \text{ und } ED = GF,$$

$$AG : GH = GB : GF \text{ und}$$

$$AG^2 : GH^2 = GB^2 : GF^2, \text{ aber}$$

$$GB^2 : GF^2 = GB : AG, \text{ also}$$

$$AG^2 : GH^2 = GB : AG, \text{ mithin}$$

$$AG^3 = GH^2 \cdot GB.$$

Nennt man nun $AG = x$, $GH = y$, $AB = a$ und mithin $GB = a - x$, so ist $x^3 = y^2 \cdot (a - x)$ die Gleichung für die Cissoide für rechtwinklichte Coordinaten.

Die Cissoide ist eine Linie der dritten Ordnung.

Weil $\frac{x^3}{a-x} = y^2$ und also $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$, so giebt es für einerley Abscisse doppelte Ordinaten und die Cissoide hat zu jeder Seite von AB

zwey

zwey congruente Schenkel, welches auch aus der Figur erhellet, indem die nämliche Zeichnung auch für den andern Halbkreis Statt finden kann. Für $x < a$ giebt es wirkliche Ordinaten; für $x > a$ ist der Ausdruck hinter dem Wurzelzeichen negativ, woraus keine Quadratwurzel möglich; mithin giebt es auch für diesen Fall keine Ordinate. Eben das ist für ein negatives x der Fall. Ueber B und unter A ist also nichts von der Cissoide befindlich.

Für $x = 0$, ist $y = 0$ und für $x = a$ ist $y = \infty$. Die Cissoide hebt also mit ihren beyden Schenkeln in A an, welche sich für wachsende x immer weiter von AB entfernen und sich MN immer mehr nähern, ohne sie indeß zu erreichen. Die Linie MN ist also die Asymptote der Cissoide.

§. 321.

Man beschreibe wieder einen Kreis um AB (Fig. 119) und ziehe BC senkrecht auf AB; auf BC nehme man beliebig viele Puncte, z. B. D, ziehe AD und mache immer $AM = DE$, so liegt M in der Cissoide.

Diese Construction der Cissoide giebt für dieselbe die nämliche Gleichung.

Es ist nämlich $AP : AB = PM : BD$ oder, wenn die kleinen Buchstaben hier die nämliche Be-

deutung wie in der vorigen Figur haben, $x : a = y : BD$, also $BD = \frac{ay}{x}$. Ferner $AP : AB = AM : AD$ oder $x : a = AM : AD$, also $AD = \frac{a \cdot AM}{x}$. Nun ist aber $BD^2 = DE \cdot AD$ (Geom. §. 162), folglich $\frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a \cdot AM \cdot ED}{x}$; aber $AM = ED$, also $\frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a \cdot AM^2}{x} = \frac{a \cdot (x^2 + y^2)}{x}$ (weil $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2$), folglich, wenn man durch a dividirt und mit x^2 miltiplicirt, $ay^2 = x^3 + xy^2$ und $ay^2 - xy^2 = x^3$, mithin $(a-x)y^2 = x^3$ und $\frac{x^3}{a-x} = y^2$, welches die obige Gleichung.

§. 322.

Die Gleichung dieser krummen Linie $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ läßt sich in folgende stetige Proportionale zerlegen

$$y : x : \frac{x^2}{y} : a - x.$$

Daß diese vier Größen stetig proportionirt sind, erhellet leicht; x ist die erste mittlere Proportional-Größe, denn $x^2 = y \cdot \frac{x^2}{y} = x^2$; daß aber $\frac{x^4}{y^2} = x(a-x)$ folgt aus der Gleichung $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, welche $y^2(a-x) = x^3$ und $a - x = \frac{x^3}{y^2}$ und $x(a-x) = \frac{x^4}{y^2}$ giebt, welches gedachte Gleichung ist.

Nun

Nun bedeutet aber y die Linie GH (Fig. 118), xAG, $\frac{x^2}{y}$ die Linie GF, weil $GF^2 = x(a-x) = \frac{x^4}{y^2}$, und $a-x$ die Linie GB; also sind die Linien GH, GA, GF und GB stetig proportionirt.

Für den Punct h gilt dieselbe Gleichung, wie man leicht findet, wenn man statt der Coordinaten AG und GH die AE und ED setzt. Die vier stetigen Proportionalen aber sind alsdann Eh, AE, ED und EB.

§. 323.

Aufgabe. Zwischen zwey gegebenen geraden Linien O und P (Fig. 118) zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung. 1) Mit CA = O beschreibe man einen Kreis und verzeichne die Cissoide AHh.

2) Die andere Linie P trage man auf den senkrechten Halbmesser CL von C nach I, ziehe BI und verlängere sie bis an die Cissoide in H.

3) Darauf ziehe man AH, welche verlängert CL in K schneidet.

4) Suche endlich zwischen CK und CI die mittlere Proportionallinie CS, so sind CS und CK die verlangten beyden Proportionallinien zwischen den gegebenen O und P oder CA und CI.

Beweis.

AC : CK = AG : GH

IC : CB = GH : GB, folglich

IC : CK = AG : GB = GH : GF.

Es sey CS die mittlere Proportionallinie zwischen CI und CK, so ist

CI : CS = GH : AG und

CS : CK = GH : AG.

Also sind CI : CS : CK : CA drey gleiche Verhältnisse und die vier Linien CI, CS, CK, CA stetig proportionirt.

§. 324.

Aufgabe. Die Cissoide durch eine stetige Bewegung zu beschreiben (Fig. 119).

Auflösung. 1) Man beschreibe über einer beliebigen Linie AB einen Halbkreis und errichte in C die unbestimmte Linie CDH senkrecht.

2) Man lege ein Winkelmaaß EFG, dessen kleinerer Schenkel FG = AB ist, dergestalt auf CH, daß der längere Schenkel EF durch den Punct E geht, dessen Entfernung von C = AB ist.

3) Man mache FM = MG.

4) Bewegt man nun das Winkelmaaß dergestalt auf CH, daß der Endpunct G des Schenkels FG immer auf der Linie CH bleibt, der

an-

andere Schenkel aber immer durch E geht, so beschreibt der Punct M die Cissoide.

Beweis. Man ziehe die Perpendikel MP und FQ, so ist

$$CE : CR = FQ : QR \text{ oder}$$
$$CE + FQ : CR + QR (= CQ) = FQ : QR = PG : PM \text{ oder}$$
$$CE + 2PM : CP - PG = PG : PM.$$

Man nenne nun $AC = a$, $CP = x$, $PM = y$, $PG = z$, so ist

$$2a + 2y : x - z = z : y \text{ und}$$
$$2(a+y)y = (x-z)z = xz - z^2; \text{ aber}$$
$$PG^2 = MG^2 - PM^2 \text{ oder}$$
$$z^2 = a^2 - y^2, \text{ folglich}$$
$$2(a+y)y = xz - a^2 + y^2 \text{ und}$$
$$2ay + 2y^2 = xz - a^2 + y^2 \text{ und}$$
$$a^2 + 2ay + y^2 = xz, \text{ folglich}$$
$$(a+y)^2 = xz \text{ und}$$
$$(a+y)^4 = x^2 z^2$$
$$= x^2 (a+y).(a-y) \text{ und folglich}$$
$$(a+y)^3 = x^2 (a-y).$$

Dies ist aber die Gleichung für die Cissoide, wie so erhellet:

Man nenne, wie zuvor, $AS = a + y = x$, $SM = x = y$ und $BS = a - y = a - x$, so bekommt man die vorige Gleichung.

§. 325.

§. 325.

Außerhalb einer geraden Linie AB (Fig. 120) ist ein Punct C gegeben. Man ziehe auf AB die senkrechte Linie CD und mache ED = EF einer gegebenen Linie a gleich. Durch C ziehe man beliebig die Linie CG und mache GH = IH = ED = EF, so liegen die Puncte G und I in einer krummen Linie, die die Conchoide oder Muschellinie heißt. Nikomedes, ein griechischer Geometer, der im zweyten Jahrhundert vor Christi Geburt lebte, hat sie erfunden, um durch ihre Hülfe die berühmte Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels aufzulösen.

Die krumme Linie DG heißt die obere, FI die untere Conchoide, C der Pol derselben und AB ihre Asymptote.

§. 326.

Aufgabe. Die Gleichung für die Conchoide oder Muschellinie zu finden.

Auflösung. Man fälle von G und I Perpendikel auf AB, nämlich GR und IL und das Perpendikel GP. Man nenne CE = b, GR = PE = x und ER = GP = y, so ist

$$HR = \sqrt{(a^2 - x^2)} \text{ und}$$

$$EH = ER - HR = y - \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$ Ferner

CE

$CE : EH = CP : PG$ d. h.

$b : y - \sqrt{(a^2 - x^2)} = b + x : y$, also

$by = by + xy - (b+x) \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}$ oder

$by - by - xy = -(b+x)\sqrt{(a^2 - x^2)}$ oder

$yx = (b+x)\sqrt{(a^2 - x^2)}$ und

$\frac{yx}{b+x} = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ und

$\frac{y^2 x^2}{(b+x)^2} = a^2 - x^2$ und

$\frac{y^2 x^2}{b^2 + 2bx + x^2} = a^2 - x^2$ und

$y^2 x^2 = (b^2 + 2bx + x^2)(a^2 - x^2)$ und

$y^2 x^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2 - b^2 x^2 - 2bx^3 - x^4$,

mithin

$y^2 x^2 - a^2 b^2 - 2a^2 bx - a^2 x^2 + b^2 x^2 + 2bx^3 + x^4 = 0$ und, wenn die Gleichung gehörig geordnet wird,

$x^4 + 2bx^3 + (y^2 + b^2 - a^2)x^2 - 2a^2 bx - a^2 b^2 = 0$,

welches die gesuchte Gleichung für die Conchoide ist.

Die Conchoide ist also eine krumme Linie von der vierten Ordnung. Aus der Gleichung $y^2 x^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2 - b^2 x^2 - 2bx^3 - x^4$ folgt, wenn man durch x^2 dividirt, $y^2 = \frac{a^2 b^2}{x^2} + \frac{2a^2 b}{x} + a^2 - b^2 - 2bx - x^2$. Zieht man auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus, so giebt es für jedes x zwey entgegengesetzte gleiche y oder Ordinaten. Die Linie CD theilt daher die Muschel-

linie

linie in zwey gleiche congruente Theile, wie ebenfalls aus der Zeichnung erhellt.

Für $x = o$, wird $y = \infty$; für ein $x > a$ giebt es kein y, wie leicht aus der obigen Gleichung $y = \frac{\sqrt{(a^2-x^2)(b+x)}}{x}$ herzuleiten ist, weil in diesem Fall der erste Factor im Zähler negativ und die Quadratwurzel daraus unmöglich wird.

Für $x = a$, wird der Werth von y in der Gleichung $y = \frac{\sqrt{(a^2-x^2).(b+x)}}{x} = o$, weil der eine Factor $a^2-x^2 = o$ wird und mithin der ganze Zähler verschwindet.

Für negative x bekommt man positive Werthe von y, folglich giebt es unterhalb AB noch eine Hälfte der Conchoide, die, wie schon erwähnt, die untere Hälfte derselben heißt.

§. 327.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel BCD (Fig. 121) in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man beschreibe mit dem Halbmesser $CB = CD$ einen Halbkreis, ziehe die Linie DF dergestalt, daß $EF = CD = CA$, und dann die Linie CE und mit DF parallel die Linie CG, so ist $BCG = \frac{BCD}{3}$.

Be-

Beweis. Weil EF = CD = CA = CE, so ist das Dreyeck CEF gleichschenklicht und EFA = ECA und CED = CDE = EFA + ECA = 2EFA, folglich BCD = D + F = 2F + F = 3F = 3BCG.

Man kann diese Aufgabe auch noch auf folgende Weise auflösen. Es sey BAD (Fig. 122) der gegebene Winkel, der in drey gleiche Theile getheilt werden soll.

Man vollende das Rechteck BACD, verlängere CD unbestimmt und ziehe die Linie AF dergestalt, daß GF = 2AD.

Man halbire GF in H und ziehe DH, so ist das Dreyeck DHF gleichschenklicht, folglich F = HDF und F + HDF = 2F = DHG = DAG und BAD = DAG + BAG = 2F + F (weil BAG = F) = 3F.

Diese Methode der Auflösung der gedachten Aufgabe ist aber nicht rein geometrisch, weil im ersten Fall EF = CD und im zweyten Fall GF = 2AD durch Versuche gefunden worden.

Diese Aufgabe läßt sich auch nur durch Hülfe der höhern Geometrie und zwar durch die Conchoide auflösen.

§. 328.

§. 328.

Aufgabe. Durch Hülfe der Conchoide einen Winkel BAD in 3 gleiche Theile zu theilen. (Fig. 122)

Auflösung. Man nehme den Punct A zum Pol der Conchoide an, mache $BI = 2AD$ und construire die Conchoide IF, vollende das Rechteck BACD, verlängere CD bis an die Conchoide und ziehe AF, so ist $GF = BI = 2AD$ und, nach dem Beweise des vorigen §, $BAD = 3BAG =$ der $BAG \frac{BAD}{3}$.

§. 329.

Aufgabe. Durch Hülfe der Conchoide zwey mittlere Proportionallinien zwischen zwey gegebenen Linien zu finden. (Fig. 123)

Auflösung.

1) Aus den beyden gegebenen geraden Linien BA und AC construire man das Rechteck BC.
2) Man theile AB in G und AC in H in zwey gleiche Theile, errichte HL senkrecht auf AC.
3) Durch D und G ziehe man die gerade Linie DG, welche die verlängerte AC in K schneidet.
4) Aus C mit $CL = AG$ schneide man HL und ziehe KL und mit dieser parallel CM.

5)

5) Aus L, als dem Pole, zeichne man über der Grundlinie CM mit der gegebenen AG eine Conchoide, welche die verlängerte AC in F schneidet.

6) Man ziehe durch D und F die gerade Linie DF, welche verlängert die verlängerte AB in E schneidet, so sind die Linien DC, CF, BE, BD oder AB, CF, BE, AC in stetiger Proportion.

Der Beweis dieser Construction gleicht im Wesentlichen dem Beweise §. 65.

§. 330.

Die Conchoide läßt sich durch stetige Bewegung eines Stifts beschreiben. Man setze zwey Liniale CE (Fig. 120) und AB rechtwinklicht zusammen. Das erste bekommt in C einen Stift, das andere eine Rinne. Man nehme noch ein Linial CG und gebe diesem nach beyden Enden hin einen Einschnitt, damit es sich bey der Drehung um den Stift C der Länge nach verschieben könne. In G, H, I befestige man drey Stifte, in den Entfernungen $GH = HI = ED$. Der Stift H bewegt sich immer in der Rinne auf AB und die Stifte G und I beschreiben die obere und untere Conchoide. Indem nämlich das Linial CG von D

nach

nach G um C bewegt wird, verschiebt es sich zugleich nach CG hin, weil der Stift H genöthigt ist, auf AB zu bleiben. Die durch die Stifte G und I beschriebene krumme Linie ist also die Conchoide.

§. 331.

Eine krumme Linie heißt transcendent, wenn für sie keine algebraische Gleichung, d. h. eine Gleichung von bestimmten Abmessungen, sondern eine transcendente, d. h. eine Gleichung von unzähligen Abmessungen gegeben werden kann.

§. 332.

Es sey um C (Fig. 124) ein Kreis beschrieben, dessen Durchmesser AB. Man denke sich einen Punct in C, der sich gleichförmig von C auf dem Halbmesser CA nach der Peripherie hinbewegt, während der Halbmesser CA selbst sich auf eine gleichförmige Weise um den Mittelpunct des Kreises bewegt, so daß der bewegte Punct in M und $CM : CA = ACP : 4R$ oder 360° ist. Die von dem Puncte M beschriebene krumme Linie heißt die Schneckenlinie oder Spirallinie des Archimedes. Konon ist zwar der eigentliche Erfinder dieser krummen Linie, da aber ihre Eigenschaften

erst

erst vom Archimedes ins gehörige Licht gestellt sind, so ist sie nach ihm benannt worden.

§. 333.

Nennt man $CM = y$ und $AP = x$, so ist $y : r = x : p (= 360°)$ oder $py = rx$ und $y = \frac{rx}{p}$, welches die Gleichung für die Schneckenlinie ist.

Aus dieser Gleichung folgen ihre Eigenschaften:

1) Ist $x = o$, so ist auch $py = o$, d. h. $y = o$, weil p nicht $= o$ seyn kann.

2) So lange $x < p$, ist $y < r$, folglich M innerhalb des Kreises.

3) Ist $x = p$, so ist $y = r$, d. h. der Punct M fällt, nachdem er durch N u. s. w. gegangen ist, in A, oder der beschreibende Punct hat den ersten Gang der Spirallinie vollendet und CA sich um C rings umgedreht.

4) Wird $x > p$, so wird $r < y$ oder $y > r$, d. h. der Punct M bewegt sich außerhalb des Kreises. Kommt die Linie CA zum zweyten Mal in die Lage CP, so ist der Winkel $= p + x$ und $p : p + x = r : CM'$ und $CM' = \frac{(p+x)r}{p} = \frac{pr}{p} + \frac{rx}{p} = r + \frac{rx}{p} = r + y = r + CM$.

Nach:

Nachdem CA den zweyten Umlauf vollendet hat, so kann sie auch den dritten, vierten u. s. w. jeden folgenden vollenden, wodurch man auf der verlängerten CP unzählige Puncte M, M' u. s. w. erhält.

§. 334.

Wenn ein Kreis AB (Fig. 125) sich auf der geraden Linie AM um ihren Mittelpunct C von A nach M wälzt, so daß der zurückgelegte Weg, z. B. AD, immer der Länge des Bogens AG gleich ist, G in D liegt und PED = ACG ist, so beschreibt der Punct A eine krumme Linie AN, welche Radlinie oder Cycloide heißt, weil ein Nagel A in einem auf ebnem Wege fortrollenden Rade eine solche krumme Linie beschreibt.

Der Kreis um C heißt der beschreibende Kreis, der Punct A der beschreibende Punct und AM die Grundlinie.

§. 335.

Es sey 1 : p das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang des Kreises; man nenne AB = 2r und AD = AG = u, so ist 2rp die Peripherie des beschreibenden Kreises und

$$2rp : u = 4R : ACG \text{ und}$$

ACG

$$ACG = DEP = \frac{4Ru}{2rp} = \frac{2Ru}{rp}.$$

Daraus folgt:

1) Für jedes u findet man den Winkel DEP, also die Stelle des Puncts P.

2) Für $u = rp$ ist $DEP = 2R$, d. h. A ist in O und B in Q oder der beschreibende Kreis hat eine halbe Revolution gemacht.

3) Ist $u = 2rp$, so ist $DEP = \frac{4Rrp}{rp} = 4R$, d. h. der beschreibende Kreis hat eine ganze Revolution oder Umdrehung vollendet.

§. 336.

Aufgabe. Die Gleichung für die Radlinie zu finden.

Auflösung. Man ziehe durch einen beliebigen Punct P der Radlinie mit AM die Parallele PL, so ist $AQ = AGB = QRO$ und $AD = AG = DP = QR$, folglich $AQ - AD = QRO - QR$, d. h. $DQ = QR$. Aber $DQ = IL = PL - PI = PL - RL = PR$, folglich $PR = QR$. Nennt man nun $PR = y$ und $QR = x$, so ist $y = x$ die Gleichung für die Radlinie.

§. 337.

§. 337.

Aufgabe. Eine Radlinie zu zeichnen.

Auflösung.

1) Man mache AQ der halben Peripherie des beschreibenden Kreises und die senkrechte QO dem Durchmesser desselben gleich.

2) Man beschreibe um QO einen Halbkreis und nehme einen beliebigen Punct R in demselben an.

3) Man ziehe parallel mit AQ die Linie RP von unbestimmter Länge und mache RP = RO, so ist P ein Punct in der Radlinie.

§. 338.

Wenn der beschreibende Kreis eine Umwälzung auf der Grundlinie AM vollendet hat, so kann er sich auf eben die Art weiter bewegen und dadurch congruente Stücke der Radlinie beschreiben.

§. 339.

Logarithmische oder logistische Linie ist diejenige krumme Linie, deren Ordinaten in geometrischer Progression sind, wenn die zugehörigen Abscissen in arithmetrischer Progression genommen werden.

Es sey (Fig. 126) X′X die Abscissenlinie, A der Anfang der Abscissen und AB senkrecht auf der Abscissenlinie beliebig angenommen. Man theile

die

die Abscissenlinie in eine Menge gleicher Theile, ziehe durch die Theilungspuncte senkrechte Ordinaten, die eine geometrische Progression mit einem beliebigen Exponenten bilden. Durch die Endpuncte der Ordinaten ziehe man die krumme Linie BMNS, welche die logarithmische Linie heißt.

Man nenne das erste Glied dieser geometrischen Reihe a, die folgenden b, c, d u. s. w., so ist $a:b = b:c = c:d$ und, wenn es eine steigende Progression ist, $a:b-a = b:c-b = c:c-d$, d. h. $PM:QN-PM = QN:MS-QN$ oder $PM:Nm = QN:SO$ und $PM:QN = Nm:SO$.

Ziehet man durch M und N eine gerade Linie Tt, welche die Abscissenlinie in T schneidet, so ist

$Nm:Mm = MP:PT$ oder
$Nm:MP = Mm:PT$, aber
$Mm = PQ$, folglich
$Nm:MP = PQ:PT$.

$PQ:PT$ ist daher ein gegebenes Verhältniß und für eine gegebene PQ ist PT eine gegebene oder unveränderliche Linie, welche Subsecante heißt und für unendlich kleine Abstände sich in die Subtangente verwandelt.

§. 340.

Die Subnormallinie der Parabel ist ihrem halben Parameter gleich (§. 259) und hierauf beruht eine artige Verbindung der Parabel mit der logarithmischen Linie.

Es sey (Fig. 127) Ll die logarithmische Linie, X′X deren Abscissenlinie, PM eine Ordinate derselben. MT sey die Tangente in M, so ist PT die Subtangente. Man ziehe MN senkrecht auf TM, so ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke TPM und NPM,

$$PT : PM = PM : PN.$$

Man nenne $PT = \frac{1}{2}a$ und $PM = y$, so ist $PN = \frac{2y^2}{a}$. Man halbire PN in V, so ist

$$PV = \frac{y^2}{a} \quad \text{oder}$$

$$a \,.\, PV = y^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Parabel, deren Scheitelpunct V und Parameter $= a$ oder der doppelten Subtangente der logarithmischen Linie gleich ist. Die Parabel schneidet die logarithmische Linie unter einem rechten Winkel M, welcher auch immer ein rechter Winkel bleibt, wenn man die Parabel auf der Abscissenlinie XX′ fortrücken läßt.

Die logarithmische Linie stellt durch ihre Coordinaten ein gewisses logarithmisches System dar, dessen Modulus die Subtangente der Curve ist.

§. 341.

§. 341.

Es sey ACB (Fig. 128) ein Quadrant. Man stelle sich vor, daß der Halbmesser CB sich gleichförmig um den Mittelpunct C bewege und nach und nach in die Lagen CE, Ce, Cε und endlich CA komme, daß ferner zu gleicher Zeit eine andere Linie sich immer parallel mit CB längs CA gleichförmig hinaufbewege und nach und nach in die Lagen KP, kp, κπ und endlich AL komme: so wird der beständige Durchschnitt dieser Parallele mit jenem Halbmesser die krumme Linie DFGHA bilden, welche die Quadratrix des Dinostratus heißt.

§. 342.

Aus der Entstehungsart dieser Curve ersieht man, daß wenn man eine beliebige Parallele mit CB, z. B. KP ziehet und durch den Punct F, wo diese die Curve schneidet, den Halbmesser CE legt: so verhält sich CK : CA = BE : BA. Der Bogen des Quadranten wird also immer im nämlichen Verhältniß getheilt werden, als der Halbmesser getheilt ist oder BE : Be = CK : Ck.

§. 343.

Aufgabe. Mittelst der Quadratrix einen Winkel ACB in eine beliebige Menge gleicher Theile, z. B. in 4, zu theilen.

Auflösung.

1) Man zeichne die Quadratrix AD;

2) Man theile AC in 4 gleiche Theile und ziehe durch die Theilungspuncte K, k, κ die Linien KP, kp, u. s. w. mit CB parallel;

3) Diese schneiden die Quadratrix in F, G, H;

4) Durch diese Puncte ziehe man die Linien CF, CG, CH, so werden diese verlängert auf dem Kreisbogen die gleichen Theile BE, Ee, eε, εA bestimmen. Die Curve führt den Namen Quadratrix, weil die Alten sich derselben zur Quadratur des Kreises bedienten.

Anhang.

Geschichte der Lehre von den Kegelschnitten und den krummen Linien höherer Ordnung.

§. 1.

Die Lehre von den Kegelschnitten ist in der ganzen Mathematik von solcher Wichtigkeit und von so ausgebreitetem Nutzen, daß es nicht anders als angenehm seyn kann, ihre erste Entstehung zu erforschen und ihre ersten Fortschritte zu beobachten. Plato, der 400 Jahr vor Christi Geburt lebte, beschäftigte sich mit der Geometrie, ermunterte fähige Köpfe zum Studium derselben und trug dadurch viel zur Erweiterung derselben bey. Wir besitzen zwar keine Schriften geometrischen Inhalts von ihm, aber die bekannte Inschrift über der Thür seines Hörsaals beweist, wie sehr er die Geometrie schätzte und wie dringend er sie seinen Zuhörern empfahl. Auch die

Er-

Erfindung der Kegelschnitte schreibt man dem Plato zu, doch scheint es, daß er mehr nur ihre Entstehung aus der Scheidung eines Kegels, als ihre Eigenschaften gekannt habe. Als Plato's Schüler und Zöglinge sind Eudoxus, Menächmus, Dinostratus, Aristäus und andere bekannt. Diese bearbeiteten diesen wichtigen Theil der Geometrie mit vielem Scharfsinn und glücklichem Erfolg.

§. 2.

Eudoxus von Cnydus war einer der berühmtesten unter den Freunden und Zeitgenossen des Plato, und erweiterte sehr die Geometrie durch eine Menge von Lehrsätzen, deren Allgemeinheit er bewieß. Er soll auch mit Erfolg die Theorie der Kegelschnitte bearbeitet haben, ja man legt ihm sogar die Erfindung derselben bey; es mögen nun seine Untersuchungen und Nachforschungen in dieser Lehre jene Meinung veranlaßt, oder man mag diese krummen Linien mit andern, deren er sich zur Auflösung des Problems über die Verdoppelung des Würfels bediente, verwechselt haben. Diogenes Laertius legt ihm sogar die Erfindung aller krummen Linien bey, indem er sagt: fertur lineas curvas invenisse. Ueberdies ist er, nach dem Zeugnisse späterer Mathematiker, der Erfinder

ver:

verschiedener Sätze aus der Stereometrie, z. B. daß die Pyramide der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Höhe und Grundfläche ist. Eratosthenes nennt ihn den Gottähnlichen, und gedenkt der von Eudoxus erfundenen Curve als einer von den Kegelschnitten verschiedenen. Menächmus scheint den eigentlichen Grund zur Lehre von den Kegelschnitten gelegt zu haben, wie daraus zu erhellen scheint, daß Eratosthenes sie die Menächmischen Linien nennt. Er wandte die Verbindung zweyer Kegelschnitte, nämlich den Durchschnitt der Parabel und Hyperbel, so wie den Durchschnitt zweyer Parabeln mit einem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte, sehr geschickt zur Auflösung der Delischen Aufgabe oder zur Bestimmung zweyer mittlern Proportionallien an. Seine beyden Auflösungen dieser Aufgabe sind ein Beweis seiner Geschicklichkeit in der höhern Geometrie. Sein Bruder Dinostratus machte sich durch die Erfindung derjenigen krummen Linie bekannt, welche man die Quadratrix nennt und welche zur Auflösung der Aufgabe dient, einen Winkel nach einem gegebenen Verhältnisse einzutheilen.

§. 3.

Aristäus der ältere hat zuerst über die Kegelschnitte ein Werk in fünf Büchern geschrieben, wel-

welches aber nicht mehr vorhanden ist. Sein Werk über die körperlichen Oerter setzt Pappus mit unter die Hauptwerke, die derjenige zu studiren habe, der sich in der geometrischen Analysis der Alten Fertigkeit erwerben wolle. Die Lehre von den körperlichen Oertern beruht auf der Lehre von den Kegelschnitten. Euklides (300 Jahre vor Christi Geburt) hat ein Werk über die Kegelschnitte in 4 Büchern verfaßt, worauf nachher Apollonius sein großes Werk über die Kegelschnitte gegründet hat. Dieses Werk des Euklides ist verlohren gegangen, soll aber, nach dem Zeugniß des Pappus, einen großen Theil der vier ersten Bücher des Apollonius ausmachen. Uebrigens ist Euklides als der Verfasser der Elemente der Geometrie und Arithmetik hinlänglich bekannt.

§. 4.

Archimedes ward im Jahre 287 vor Christi Geburt zu Syrakus gebohren. Diesen großen Mathematiker haben fast alle Theile der Mathematik beschäftigt, insbesondere die Geometrie und Mechanik, in welchen sich sein Scharfsinn vorzüglich auszeichnete. Die Lehre von den Kegelschnitten und von den krummen Linien überhaupt verdankt ihm ansehnliche Bereicherungen. Die Betrachtung der Kegelschnitte war indeß anfangs sehr

man-

mangelhaft. Die schneidende Ebene dachte man sich senkrecht auf der Seite des gleichseitigen Kegels. War der Scheitelwinkel im Dreyeck durch die Axe des Kegels ein rechter, so gab der senkrechte Schnitt eine Parabel, welche man den Schnitt des rechtwinklichten Kegels nannte; war der Scheitelwinkel spitz, so entstand eine Ellipse, welche der Schnitt des spitzwinklichten Kegels hieß; bey einem stumpfen Winkel erhielt man eine Hyperbel, welche damals der Schnitt des stumpfwinklichten Kegels genannt ward. Im ersten Fall ist der Schnitt mit der Seite des Kegels parallel, im zweyten trifft er beyde Seiten des Kegels und im dritten beyde entgegengesetzte Kegel (§. 242). Die Benennungen, womit wir heut zu Tage die Kegelschnitte bezeichnen, sind zuerst vom Apollonius eingeführt. Die Asymptoten waren schon dem Archimedes bekannt; er nennt sie Linien, die dem stumpfwinklichten Schnitt am nächsten sind. Archimedes erfand auch die Quadratur der Parabel. Er entdeckte auch zuerst die Eigenschaften der von Conon erfundenen Spirallinie, weshalb sie auch seinen Namen führt. Derjenige, der zuerst in ein unbekanntes Land hineindringt, verdient es mit größerm Rechte, daß das Land seinen Namen führe, als derjenige, der es zuerst

ent-

entdeckt hat. Archimedes Beweise über die Tangente der Spirallinie sind die schwersten Stellen seiner Schriften. Bouillaud, selbst ein geschickter Geometer, zweifelte, nachdem er sie durchstudirt, ob er sie gehörig verstanden habe. In der That verlangen sie eine große Anstrengung des Geistes; aber je schwerer es ist, dem Wege zu folgen, den dieses große Genie gegangen, desto mehr haben wir Ursache, denjenigen zu bewundern, der ihn zuerst geebnet und sich nicht von demselben verirrt hat. Die vielen andern Schriften des Achimedes gehören nicht hieher. Eine prächtige Ausgabe der Werke des Archimedes, mit Anmerkungen und gelehrten Abhandlungen begleitet, ist zu Oxford 1792, groß Folio, herausgekommen.

§. 5.

Ein Zeitgenosse des Archimedes war Eratosthenes, ein großer Geometer und Astronom. Er verdient, den drey großen Geometern des Alterthums Aristäus, Euklides und Apollonius beygesellt zu werden. Noch ist Eratosthenes bekannt durch seine Auflösung des Problems der Verdoppelung des Würfels. Er erdachte nämlich ein Instrument, zwey oder mehrere mittlere Proportionallinien zwischen zwey gegebenen zu finden. Der Erfinder dieses Instruments schätzte es so

hoch,

hoch, daß er es in einem Tempel mit einer Beyschrift in Versen aufhängen ließ, und in einem Schreiben an den König Ptolemäus den Gebrauch und die Einrichtung desselben erklärte. Von Pappus wird es ein Mesolabum genannt. Um die Astronomie hat sich dieser Mathematiker gleichfalls sehr verdient gemacht. Er war es, der dem Ptolemäus Evergetes die Erbauung und Aufstellung großer Instrumente in dem Säulengange der Schule zu Alexandrien zur Beobachtung der Himmelskörper anrieth. Diese Instrumente waren eine Verbindung verschiedener Ringe und Kreise, welche die Kreise der Himmelskugel vorstellten und zur Versinnlichung vieler Beobachtungen am Himmel dienten.

§. 6.

Zu der Zeit, wie Archimedes seine Laufbahn endigte, begann Apollonius die seinige. Er ward zu Pergä in Pamphilien unter der Regierung des Ptolemäus Evergetes, gegen die Mitte des zweyten Jahrhunderts vor Christi Geburt, geboren. Er bildete sich zu Alexandrien unter den Nachfolgern des Euklides, und erwarb sich daselbst die großen Kenntnisse in der Geometrie, die ihn so berühmt gemacht haben. Die Alten legen ihm den Beynamen des großen Geometers bey.

Indeß, ungeachtet des großen Genies dieses Geometers, darf man doch nicht in Abrede stellen, daß der Geometer von Syrakus ihm nicht nachstehe, ja ihn selbst in gewissen Rücksichten durch die außerordentlichen Wege, die er sich in bisher noch unbekannten Gegenden der Mathematik zu bahnen wußte, übertrifft. Sicherlich, giebt es unter den Neuern nur einen Newton, so hat es im Alterthum nur einen Archimedes gegeben. Das Hauptwerk dieses Geometers handelt von den Kegelschnitten; es enthielt 8 Bücher, von welchen aber nur die ersten vier in der Ursprache, die drey folgenden in einer arabischen Uebersetzung und aus dieser in einer lateinischen Uebersetzung vorhanden sind. Das achte Buch ist von Halley nach der Inhaltsanzeige des Apollonius wiederhergestellt worden. In dem ersten Buche wird von der Entstehung der Kegelschnitte und ihren vornehmsten Eigenschaften gehandelt. Das zweyte handelt von den Durchmessern der Schnitte und den Asymtoten. Das dritte Buch enthält solche Aufgaben, die durch Hülfe der Kegelschnitte aufgelöst werden müssen. Das vierte Buch zeigt, auf wie mancherley Arten Kegelschnitte sich schneiden können. In diesen vier ersten Büchern hat Apollonius die Lehre von den Kegelschnitten, so

weit

weit sie vor ihm schon bekannt gewesen, vorgetragen, jedoch mit vielen Verbesserungen und Zusätzen. Auch ist die Ausführung leicht und der Vortrag verständlich. Die vier folgenden Bücher aber enthalten schwere und tiefe Forschungen und Untersuchungen. Wie schon gesagt, fehlt das achte. Das fünfte Buch handelt von den größten und kleinsten Linien, die sich von einem Puncte her an den Kegelschnitt ziehen lassen. Das sechste betrifft die Gleichheit und Aehnlichkeit der Kegelschnitte. Im siebenten Buche kommen viele neue Sätze über die conjugirten Durchmesser, auch einige Sätze vom Größten und Kleinsten vor. Das achte Buch, welches ganz verlohren gegangen ist, enthielt bestimmte Aufgaben und Anwendungen des siebenten. Halley hat es wieder hergestellt. Die Kegelschnitte des Apollonius haben, wie alle berühmte Werke des Alterthums, eine große Menge von Herausgebern und Commentatoren gefunden. Unter den Griechen hat Pappus Hülfssätze zu dem Werke des Apollonius, und die gelehrte Hypathia, Tochter des Theon, (um das Jahr 400) einen Commentar geliefert, der aber verlohren gegangen ist. Halley hat eine schöne Ausgabe des Apollonius, Oxford 1710, gr. Fol. veranstaltet. Als eine frühere Ausgabe der Kegel-

schnitte

schnitte des Apollonius mag man sich merken: Apollonii Conicorum libri IV methodo nova illustrata et succincte demonstrata par Isaacum Barrow, Londini 1675. 4. Unter den Neuern haben über die Kegelschnitte geschrieben: de la Hire (Sectiones conicæ in novem libros distributæ Paris. 1685); de l'Hopital (Traité analytique des sections coniques, à Paris 1707. 1720); de la Chapelle (Traité des sections coniques et autres courbes anciennes, à Paris 1751. 8); Biot (Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré, à Paris 1802. 1805). In England haben Jakob Milnes (1702), Trevigar (1731), John Müller (1735), Robert Simson (1750), Campbell (1755), Hutten (1787), Robertson (1792) und einige mehr Werke über die Kegelschnitte herausgegeben. Unter den Deutschen bemerken wir Hausen (in seinen Elementis Matheseos), Tempelhoff (Analysis des Unendlichen), Karsten (Lehrbegriff der Mathematik, 7ter Theil), Kästner (Analysis des Endlichen und Unendlichen).

§. 7.

Vom Apollonius und seinen Commentatoren und den spätern Schriftstellern über die Kegelschnitte wollen wir zu den Erfindern einiger andern

Cur-

Curven zurückkehren. Nach dem Apollonius fing das Studium der Geometrie an in Abnahme zu gerathen. Statt origineller Schriftsteller, deren Entdeckungen die Wissenschaft zu bereichern und zu erweitern vermöchten, finden wir nur Commentatoren und Herausgeber früher geschriebener Werke. Solche waren Pappus und Theon, doch verdient der erstere in eine höhere Classe versetzt zu werden, denn unstreitig zeigt er in seinen Schriften nicht gewöhnliche Einsichten in die Geometrie. Die Absicht dieses Schriftstellers scheint gewesen zu seyn, mehrere zerstreute Erfindungen zu sammeln, und die vornehmsten Schriften älterer berühmter Geometer zu erklären und zu ergänzen. Dies that er vorzüglich mit den Schriften des Archimedes, Euklides, Apollonius u. s. w. Pappus theilt uns auch Nachrichten mit über die Versuche der Alten zur Auflösung der beyden berühmtesten Aufgaben des Alterthums — der Verdoppelung des Würfels und der Theilung des Winkels in drey oder mehrere gleiche Theile. Ohne die Nachrichten, die Pappus uns darüber aufbewahrt, würden wir wenig oder nichts von den Bemühungen und Arbeiten einiger alten Mathematiker, deren Schriften nicht bis auf unsere Zeiten gekommen sind, wissen.

§. 8.

§. 8.

Diokles, der Erfinder der Cissoide oder der epheuähnlichen Linie (von κισσος, Epheu) mußte, möchte man glauben, nach dem Pappus gelebt haben, weil dieser in seiner Beschreibung der verschiedenen Methoden zur Auflösung der Aufgabe der Verdoppelung eines Würfels, oder der Bestimmung zweyer mittlern Proportionallinien zwischen zwey gegebenen, der Erfindung des Diokles nicht erwähnt. Aus einer Anführung des Proklus, daß die Cissoide schon dem Geminus bekannt gewesen, der im ersten Jahrhundert vor Christi Geburt lebte, erhellet indeß, daß Diokles vor der christlichen Zeitrechnung gelebt haben müsse, dagegen Montucla und andere ihn ins sechste Jahrhundert nach Christi Geburt setzen. Eutocius legt dem Diokles noch die Auflösung der Aufgabe bey, die Kugel durch eine Ebene in einem gegebenen Verhältnisse zu theilen; eine Aufgabe, deren Auflösung Archimedes zu geben versprochen hatte, die man aber nirgends findet. Die Aufgabe ist nicht leicht. Die Auflösung des Diokles giebt uns eine vortheilhafte Idee von seiner Geschicklichkeit und Fertigkeit in der Geometrie. Man findet in dieser Auflösung eine gewandte und tiefe Analyse, welche zeigt, daß er diese Methode mit vieler Gewandheit

behandelte. Uebrigens ist diese Auflösung nicht frei von einem gewöhnlichen Fehler der Alten, daß sie nämlich zwey Kegelschnitte anwandten, wo eine einzige in Verbindung mit dem Kreise hingereicht hätte.

§. 9.

Das Zeitalter des Nikomedes, des Erfinders der Conchoide, ist ungewiß. Wahrscheinlich lebte er zwischen dem ersten und dritten Jahrhundert vor der christlichen Zeitrechnung (Montucla, Histoire des Mathematiques, Tom. I. an VII. p. 254). Das einzige Denkmal, welches uns von seinen Arbeiten übrig geblieben, ist seine Conchoide und die sinnreiche Anwendung derselben zur Auflösung des Problems von zwey mittlern Proportionalen und zur Theilung eines Winkels in 3 gleiche Theile.

§. 10.

Galilei hat zuerst die Cykloide geometrisch behandelt. In einem Briefe an Toricelli vom Jahre 1639 sagt er, daß er diese Linie seit 40 Jahren in Untersuchung gezogen, und sie wegen ihrer gefälligen Gestalt zu Gewölbbogen unter Brücken für schicklich erachtet habe; er habe versucht, ihren Inhalt zu bestimmen, sey aber nicht damit zu Stande gekommen. (Klügels Mathematisches Wörterbuch, erster Theil. Art. Cykloide.)

Ein französischer Gelehrter, Roberval, hat im Jahre 1634 den Inhalt der Cykloide mit dem Inhalt des erzeugenden Kreises verglichen und gefunden, daß jener das Dreyfache des letztern ist. Nach dem Tode des Galilei fand Toricelli den Inhalt derselben. Später haben sich mehrere Mathematiker, Pascal, Wallis, Huygens, beyde Bernoulli, mit dieser Linie beschäftigt und manche vortrefliche Eigenschaften derselben entdeckt. Die Theorie der Cykloide, welche man den Liebling der Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts nennen kann, ist durch die neuere Infinitesimal-Rechnung erst gehörig ins Licht gestellt worden.

§. 11.

Die logarithmische Linie soll von Edmund Günter angegeben seyn. Günter war Professor der Astronomie am Greshams Collegium. In der Sammlung seiner Schriften findet sich indeß nichts davon. Vermuthlich ist es ein Mißverstand. Günter hat die Logarithmen der Zahlen, Sinus und Tangenten auf einen Maaßstaab, in England Gunters Scale genannt, getragen. Die erstere dieser Linien heißt auch die logarithmische Linie. Huygens hat der Curve, von der hier die Rede ist, ihren Namen gegeben, sagt

aber,

aber, daß sie schon von andern untersucht sey. (Klügels Mathem. Wörterbuch, Art. logarithmische Linie.)

Ueber die Analysis der Alten.

§. 12.

Die Analysis, als Methode bey mathematischen Untersuchungen, ist die Entwickelung des Zusammenhangs der gesuchten Größen mit gegebenen. Man muß die von den Alten gebrauchte Analysis wohl von der bey den Neuern üblichen unterscheiden. Die Analysis der Alten bezog sich auf die Geometrie, und bediente sich bloß geometrischer Hülfsmittel; die Analysis der Neuern erstreckt sich auf alle meßbaren Gegenstände und gebraucht die allgemeine Arithmetik, indem sie den Zusammenhang der Größen in Gleichungen bringt.

§. 13.

Euklides (im 13ten Buche seiner Elemente, im 1sten Satze) giebt von der Analysis folgende Erklärung: sie ist das Verfahren, nach welchem man das Gesuchte als zugestanden annimmt, und

durch daraus gezogene Folgerungen auf etwas wahres zugestandenes kommt. Der Analysis ist die Synthesis oder Composition entgegengesetzt. Sie ist, nach Euklides (am angeführten Orte), dasjenige Verfahren, wo man das Zugestandene zum Grunde legt, und durch die daraus gezogenen Folgen zu der Folgerung oder Darstellung des Gesuchten gelangt. Pappus giebt uns folgenden Begriff von der Analysis der Alten: Die Analysis ist diejenige Methode, da man von dem Gesuchten als zugestanden angenommen durch die daraus gezogenen Folgerungen auf etwas Gegebenes kommt, welches zu der Synthesis führt. Bey der Auflösung nämlich betrachtet man das Gesuchte als gefunden und forscht, woraus es zunächst folget; dann, woraus dieses sich herleiten lasse und so immer weiter, bis man auf diesem Rückwege auf etwas trifft, das gegeben ist oder zum Grunde gelegt werden kann. Bey der Synthesis hingegen macht man mit demjenigen, was bey der Analysis zuletzt erhalten ward, als etwas gegebenes, den Anfang und läßt das, was daraus folgte, nun vorangehen, in der natürlichen Ordnung nach einander, bis man zu der Darstellung des Gesuchten gelangt.

§. 14.

§. 14.

Man kann demzufolge auf zwiefachem Wege zur Erkenntniß geometrischer Wahrheiten gelangen, auf dem Wege der Synthese und der Analyse. Die Beyspiele der erstern sind die häufigsten und beynahe die einzigen, die man in den Schriften der alten Geometer antrifft. Sie ist diejenige Methode, deren man sich bedient, wenn man andern Wahrheiten auseinandersetzen will, deren Verbindung mit den Grundsätzen oder früher schon erwiesenen Sätzen der Lehrer schon kennt. Man geht also von Grundsätzen oder früher schon erwiesenen Wahrheiten aus, und indem man diese verbindet und von Folgerungen zu Folgerungen schreitet, gelangt man endlich zum Beweis des in Frage stehenden Satzes.

§. 15.

Der Gang der Analyse ist hiervon sehr verschieden. Man bedient sich dieser Methode, wenn es auf die Erfindung neuer geometrischer Sätze — Aufgaben oder Lehrsätze — ankommt Man fängt damit an, das für wahr und erwiesen anzunehmen, was erwiesen werden soll, oder man sieht die Aufgabe, die aufgelöst werden soll, als schon

auf-

aufgelöst an. Man ziehet daraus die Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen und aus diesen neue, bis man zu einem augenscheinlich wahren oder falschen Satze, wenn es ein Lehrsatz oder zu etwas Möglichem oder Unmöglichem, wenn es eine Aufgabe ist, gelangt ist. Die Natur dieser letzten Folgerung entscheidet über die Wahrheit oder Möglichkeit des untersuchten Satzes. Vergleicht man diese beyden Methoden mit einander, so findet man, daß in der einen mehrere Sätze auf gewisse Weise verbunden werden, aus deren Verbindung ein neuer Satz entsteht. Daher ist auch der Name dieser Methode entstanden; denn Synthesis heißt Verbindung. Bey der andern Methode hingegen zerlegt man einen noch ungewissen Satz in seine Theile, die durchaus wahr seyn und zusammen gehören müssen, wenn der Satz selbst wahr ist oder falsch und widersprechend oder auch einer schon erwiesenen geometrischen Wahrheit widerstreitend seyn müssen, wenn der Satz selbst falsch ist. Daher ist bey dieser Methode der Name Analyse entstanden, welches Decomposition oder Auflösung bedeutet.

§. 16.

Die Erfindung der geometrischen Analysis wird dem Plato zugeschrieben. Jedoch kennt man sein

Ver-

Verfahren nicht bestimmt, weil wir keine mathematischen Schriften von diesem berühmten Philosophen besitzen. Archimedes bediente sich dieser Methode zuweilen, und Pappus beynahe immer. Diejenigen müssen also sehr wenig die Geometrie der Alten kennen, welche die Frage aufwerfen, ob sie eine Analyse gehabt haben. Wir besitzen noch ein Werk vom Apollonius, unter dem Titel: de sectione rationis, welches durchaus analytisch behandelt ist nnd worauf Newton, ein gründlicher Kenner der alten Geometrie, sehr viel hielt. Uebrigens drückt man sich auf eine sehr uneigentliche Art aus, wenn man, wie heut zu Tage wirklich geschieht, diejenige Methode, welche keine Berechnung anwendet und zum Auge durch Figuren und zum Verstande durch Vernunftgründe spricht, die synthetische Methode oder die Synthese nennt; richtiger muß man sie die Methode der Alten nennen. Die Alten hatten, wie wir gesehen haben, auch eine analytische Methode, die man die Analysis der Alten oder die geometrische Analysis nennt, aber nicht mit der Analysis der Neuern oder der algebraischen Analysis zu verwechseln ist. Indeß glaube man nicht, daß das Wesen der analytischen Methode in der Rechnung oder der algebraischen Bezeichnungsart be-

stehe,

stehe, vielmehr kann man bey Anwendung der Rechnung auch synthetisch verfahren, wenn man bey Lehrsätzen ihren Beweis bloß aus den vorher erwiesenen Sätzen construirt, und bey der Auflösung von Aufgaben, wenn man zeigt, wie man bloß aus gegebenen Größen zu den unbekannten gelangt. Das Wesen der algebraischen Analysis oder der Analysis der Neuern besteht demnach darin, daß die Bedingungen der vorgelegten Frage oder Aufgabe in Gleichungen gebracht werden, aus deren Verbindung man eine Endgleichung herleitet, in der das Unbekannte durch das Bekannte nach den Regeln der Algebra bestimmt wird.

§. 17.

Zu der Anwendung der alten Analysis auf geometrische Aufgaben lassen sich keine bestimmte Vorschriften geben; man kann hier keine so unveränderlichen Anweisungen ertheilen, daß dadurch in allen Fällen das Gesuchte gefunden würde. Immer ist eine gewisse Vorbereitung nöthig, die Aufspürung und Einführung der Hülfsgrößen oder Mittelglieder, um die gegebenen Größen mit den Gesuchten zu verbinden. Man muß aufmerksam auf dasjenige seyn, was durch das

un-

unmittelbar Gegebene bestimmt wird, um dadurch sich den Weg zu dem Gesuchten zu bahnen. Hier bleibt der Erfindungskraft eines jeden überlassen, wie er sich zu helfen habe, da die Mittel zum Zweck mancherley sind, so wie die Beschaffenheit der Aufgaben sehr verschieden ist. Uebung ist hier hülfreicher als Regeln. Man muß, ehe man die Auflösungen geometrischer Aufgaben von andern lernt, seine Kräfte daran versuchen. Die Sätze der Elementar-Geometrie muß man vollkommen gegenwärtig haben, besonders die Eigenschaften des Kreises, die häufig große Dienste thun. Folgende Bemerkungen werden bey diesem Geschäfte von Nutzen seyn. Sie sind von einem mit dem Verfahren der alten Geometer sehr bekannten Manne, dem Newton.

Man hat oft einige der gegebenen Linien zu verlängern, bis sie andere schneiden oder von einer bestimmten Länge werden. Oder man ziehe von einem ausgezeichneten Puncte Paralleln oder Perpendikel oder verbinde Puncte durch Linien. Wenn zwey nicht parallele Linien mit einer dritten gegebene Winkel machen, so verlängere man sie bis zu ihrem Durchschnitt, wodurch ein der Art nach gegebenes Dreyeck erhalten wird, worin die Verhältnisse der Seiten gegeben sind. Wenn ein

Win-

Winkel gegeben wird oder einem andern gleich ist, so bilde man mit demselben ein Dreyeck, das der Art nach gegeben oder einem andern ähnlich ist, entweder durch Verlängerung einiger Linien oder durch eine andere Legung der gegenüber stehenden Seite. Ist das Dreyeck schiefwinklicht, so ist es oft in zwey rechtwinklichte zu zerlegen. Vielseitige Figuren sind durch Diagonale in Dreyecke zu zertheilen. Ueberhaupt hat man dahin zu sehen, daß man die ganze Zeichnung in Dreyecke, gegebene, ähnliche oder rechtwinklichte zerlege. (Klügels Mathem. Wörterbuch, Art. Analysis.)

§. 18.

Wenn es gleich auf der einen Seite nicht geleugnet werden kann, daß das Studium der alten Geometer zur Uebung des mathematischen Geistes wesentlich beyträgt und demselben eine Gewandheit erwirbt, die ihm bey Aufsuchung neuer Lehrsätze sehr zu Statten kommen kann, so ist es doch auf der andern Seite nicht weniger gewiß, daß die analytische Methode der Neuern eine Kürze in verwickelte geometrische Untersuchungen bringt, welche die Methode der Alten nicht gewährt, und oft zu überraschend neuen Resultaten führt, zu welchen die alte Analysis

den Weg schwerlich gezeigt haben würde. Man thut daher sicherlich Unrecht, wenn man aus übertriebener Werthschätzung der Alten und deren Methode die neuere Methode herabwürdigt, durch deren Hülfe die Mathematik so große Fortschritte gemacht hat. Die Elemente der Mathematik trage man nach der Methode der Alten vor, wovon uns Euklides und Apollonius Muster aufgestellt haben; aber die höhere und angewandte Mathematik wird immer am besten nach der bisher gebräuchlichen Methode sich abhandeln lassen.

§. 10.

Einige Beyspiele werden den Unterschied der Analyse und Synthese noch mehr erläutern.

Aufgabe. Eine gerade Linie AB (Fig. 129) soll so eingetheilt werden, daß das unter der ganzen Linie und einem der beyden Abschnitte enthaltene Rechteck dem Quadrat des übrigen Abschnitts gleich sey oder $AB \cdot AP = PB^2$.

Auflösung. Es sey P der gesuchte Punct. Man beschreibe über AB und PB die Quadrate ABCD, BNOP. Man verlängere OP bis M auf DC, so ist nach der angenommenen Voraussetzung, daß P der gesuchte Punct ist, und der Aufgabe ein Genüge thut,

AM

$AM = PN$ oder

$AP . PM = PB^2$ und, wenn man das Rechteck CP auf beyden Seiten addirt,

$AP . PM + CP = CP + PB^2$ d. h.

$BC^2 = CN . NO$.

Man halbire BC in E und ziehe AE, so ist

$CN . NO + BE^2 = EN^2$ (Eukl. 2. 6); aber

$CN . NO = BC^2 = AB^2$, folglich

$AB^2 + BE^2 = EN^2$; aber

$AB^2 + BE^2 = AE^2$; folglich

$AE^2 = EN^2$ und

$AE = EN$.

Daraus läßt sich nun folgende synthetische Auflösung der nämlichen Aufgabe herleiten;

1) Man beschreibe über AB das Quadrat $AC = AB^2$.

2) Halbire BC in E und ziehe AE.

3) Verlängere BC nach N, bis $EN = AE$ wird.

4) Beschreibe von BN das Quadrat $OB = BN^2$.

5) Verlängere OP bis M auf DC, so ist AB in P dergestalt geschnitten, daß $AB . AP = PB^2$.

Beweis. Da BC in E halbirt und BN ihr gerade fort angesetzt ist, so hat man

$CN . NO + BE^2 = EN^2$ (Eukl. 2. 6)

$= AE^2$ (weil $EN = AE$). Ferner

AB^2

$AB^2 + BE^2 = AE^2$ (Eukl. 1. 47), folglich $CN.NO + BE^2 = AB^2 + BE^2$ und, wenn man BE^2 subtrahirt,

$$CN.NO = AB^2, \text{ d. h.}$$
$$NM = AC.$$

Man subtrahire auf beyden Seiten BM, so ist

$OB = AM$, aber
$OB = PB^2$ und
$AM = PM.AP = AB.AP$, folglich
$AB.AP = PB^2$.

Man ersieht also aus diesem Beyspiele, daß das analytische Verfahren zum synthetischen Beweis der Aufgabe geführt hat.

Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie AB (Fig. 130) in C nach stetiger Proportion geschnitten und $AD = \frac{1}{2}AB$ gemacht, so ist das Quadrat von DC dem fünffachen Quadrat der Hälfte von AB gleich oder $DC^2 = 5AD^2$. (Oder, wie Euklides 13. 1. sagt: Wird eine gerade Linie, AB, in C, nach stetiger Proportion geschnitten: so potenzirt die aus ihrer Hälfte AD und ihrem größern Abschnitte AC, zusammengesetzte Linie, CD, das fünffache Quadrat solcher Hälfte, AD.)

Man

Man schneide die Linie AB in C nach stetiger Proportion, so daß AC der größere Abschnitt sey. Man mache ferner $AD = \frac{1}{2}AB$.

Es soll demnach erwiesen werden, daß $CD^2 = 5AD^2$.

Analysis. Es sey $CD^2 = 5AD^2$. Nun ist

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 + 2(AC.AD) \text{ (Eukl. 2.4)}$$

folglich $5AD^2 = AC^2 + AD^2 + 2(AC.AD)$ und

$$4AD = AC^2 + 2(AC.AD).$$

Aber $BA = 2AD$, folglich

$$2(AD.AC) = BA.AC.$$

Weil AB nun in C nach stetiger Proportion geschnitten ist, so hat man

$$BA : AC = AC : CB, \text{ also}$$

$$AC^2 = AB.CB, \text{ folglich}$$

$$AB.AC + AB.CB = 4AD^2; \text{ aber}$$

$$AB.AC + AB.CB = AB^2 \text{ (Eukl. 2. 2); also}$$

$$4AD^2 = AB^2 \text{ oder}$$

$$2AD = AB,$$

welches auch in der That so ist.

Synthetischer Beweis oder Composition.

Da $2AD = AB$, so ist

$$AB^2 = 4AD^2; \text{ aber (Eukl. 2. 2)}$$

AB^2

$AB^2 = AB.AC + AB.CB$, folglich
$4AD^2 = AB.AC + AB.CB$; aber
$AB.AC = 2(AD.AC)$ und
$AC^2 = AB.CB$; folglich
$AC^2 + 2(AD.AC) = 4AD^2$ und
$AD^2 = AD^2$, folglich
$AC^2 + 2(AD.AC) + AD^2 = 5AD^2$; aber
$AC^2 + 2(AD.AC) + AD^2 = DC^2$ (Eukl. 2. 4),
folglich $DC^2 = 5AD^2$.

Aus dem letzten Beyspiel ersieht man deutlich den entgegengesetzten Gang beyder Beweisarten, indem die Synthesis damit anhebt, womit die Analysis endet und diese damit anhebt, womit jene endet.

§. 20.

Das mag hinreichen, dem Leser eine Vorstellung von der Methode der Alten zu geben. Descartes, der 1650 starb, wandte zuerst die Algebra auf die Geometrie und insbesondere auf Untersuchung der Natur der krummen Linien an. Vor ihm hatte schon Vieta (gest. 1603) Formeln für die Chorden vielfacher Winkel durch die Chorde des einfachen gefunden. Diese Anwendung von Rechnungen auf geometrische Lehren hat zur Erweiterung der Geometrie sehr viel bey-

beygetragen und dadurch sind die großen Fortschritte möglich geworden, welche gegenwärtig zum Erstaunen weit getrieben sind. Dieser neuere Theil der Geometrie führt füglich den Namen calculus geometricus, welche Benennung der verstorbene Prof. Lorenz durch logistische Geometrie übersetzt, weil λογιζειν rechnen heißt. Es läßt sich auch nicht leugnen, daß diese Benennung paßlicher ist, als die bisher übliche: analytische Geometrie, indem dieser Ausdruck eigentlich auf einen analytischen Vortrag der Geometrie deutet. Weil man oft die Benennungen Analysis und Algebra als gleichbedeutend gebraucht, so entstand daraus die Benennung analytische Geometrie, die besser die algebraische oder die rechnende heißen sollte.

§. 21.

Ich habe eben gesagt, daß Descartes durch Hülfe der Algebra besonders die Natur der krummen Linien untersuchte; er erfand nämlich algebraische Gleichungen zwischen zwey veränderlichen und zwischen beständigen Größen, wodurch die Eigenschaften der krummen Linien bestimmt wurden, deren Coordinaten durch die veränderlichen Größen und deren beständige Linien durch

die

die beständigen Größen der Gleichung ausgedrückt werden. Solche Gleichungen sind als vollständige Definitionen der krummen Linien anzusehen, denn aus denselben lassen sich alle Eigenschaften derselben, selbst die verborgensten, vermittelst der algebraischen Auflösungs-Methode herleiten. Dies ist der Inhalt seiner Geometrie, eines sehr gehaltvollen Werkes, welches zuerst 1637 erschien.

Zu gleicher Zeit mit Descartes stellte Fermat (gest. 1665) die Beschaffenheit einer Curve durch eine Gleichung dar. Einfach und sinnreich ist seine Methode, die Parabel zu quadriren, nämlich mittelst der Summirung einer geometrischen Reihe, wobey er die Abscissen in geometrischer Progression fortgehen läßt. Auch hat er ein Verfahren angegeben, berührende Linien an eine Curve zu ziehen.

Pascal (gest. 1662), Viviani (gest. 1703), Huygens (gest. 1695), Wallis (gest. 1703), Brounker (gest. 1684), Mercator (gest. 1694) beschäftigten sich alle mit der Rectification und Quadratur krummer Linien. Barrow (gest. 1677) erfand eine künstliche Methode, berührende Linien an Curven zu ziehen. Mit dem Ende dieses Jahrhunderts endet das Zeitalter der mittlern Geo-

metrie, die entweder dem Muster der Alten folgte oder die Algebra auf die Geometrie anwandte.

Newton und Leibnitz, die Erfinder der Analysis des Unendlichen, erweiterten das Gebiet der logistischen Geometrie auf eine erstaunliche Weise und löseten auf eine leichte Art Aufgaben auf, die den alten Geometern viele Mühe gemacht hatten; z. B. die Rectification und Quadratur der krummen Linien. Dennoch behielt die Geometrie der Alten noch immer ihre Verehrer, besonders in England. Die Lehre von den Kegelschnitten ist von den Engländern häufig nach der Methode der Alten bearbeitet worden.

Nach Newton haben vorzüglich Bragelogne, Mitglied der französischen Akademie, Euler (in seiner Analysis des Unendlichen 1748), Cramer (Introduction à l'Analyse des lignes courbes algebriques. 1750) die Theorie der krummen Linien bearbeitet.

Newton, Maclaurin, Braikenridge haben Methoden zur organischen Beschreibung krummer Linien durch stetige Bewegung eines Punctes angegeben.

Maclaurins Hauptwerk: Treatise of Fluxions, Edinburgh 1742, enthält größtentheils geometrische Untersuchungen.

Ueber die krummen Linien dritter Ordnung hat Clairaut das erste Werk geliefert.

Leibnitz, die beyden Bernoulli löseten durch Hülfe der neuerfundenen Differential- und Integralrechnung mancherley schwere Aufgaben über krumme Linien auf.

Euler, la Grange, Lacroix haben in unsern Zeiten die höhere Mathematik mit wichtigen Lehrsätzen bereichert.

Gedruckt in der Hammerich- und Heineking'schen Buchdruckerey.

Druckfehler.

Seite 63, Z. 4, v u. lies $CD = nq = b$.

— 126, Z. 7, v. o. — $\text{Sin. } B = \frac{b}{a}$.

— 239, Z. 8, v. u. — $\frac{\text{Cof. a . Cof. b . Cof. d}}{\text{Sin. b . Sin. d}}$.

Nachricht an den Buchbinder.

Die Kupfertafeln werden am Ende des Buches so eingeheftet, daß sie beym Lesen völlig heraus geschlagen werden können.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bugge, Thomas,

Lehrbuch der gesammten Mathematik oder Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften

Bd.: 3,1

Altona 1816

Math.u. 36 h-3,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593756-6
VD18 1206033X-001